**Лекция 2. Матрицы. Основные понятия**

***Определение***. **Матрицей** размера **m × n** называется прямоугольная таблица чисел (элементов матрицы)

*a*11 *a*12 … *a*1n

A =

*a*21 *a*22 … *a*2n

… … … …

*a*m1 *a*2m … *a*mn

Матрицы обозначают заглавными латинскими буквами, их элементы — соответствующими прописными буквами с индексами: *a*11, *a*12, … *a*mn . Первый индекс элемента матрицы означает номер строки, в которой находится элемент, второй — номер столбца. Строки нумеруются сверху вниз, а столбцы — слева направо.

**Пример 1**

Примеры матриц.

$A=\left(\begin{matrix}3&2&4\\1&8&0\\5&7&-2\end{matrix}\right),$ $B=\left(\begin{matrix}2&1\\-1&5\end{matrix}\right),$ $C=\left(\begin{matrix}1&-5&3\\4&0&2\end{matrix}\right),$ $D=\left(\begin{matrix}2&1&0\end{matrix}\right), $ $M=\left(\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right).$

**Задание 1**

1) Назовите размер каждой матрицы из примеров матриц.

2) Чему равны *a*12 и *a*21 элементы в каждой из матриц?

3) Чему равны *a*13 и *a*23 элементы в матрицах A, C?

**Способы записи матриц**

$A=\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\\a\_{31}&a\_{32}\end{matrix}\right)$ $B=\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\\a\_{31}&a\_{32}\end{matrix}\right]$ $C=\left‖\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\\a\_{31}&a\_{32}\end{matrix}\right‖$ $D=\left‖a\_{ij}\right‖$

**Виды матриц**

**1. Матрица-строка** — матрица, состоящая из одной строки.

**Пример 2.** $D=\left(\begin{matrix}2&1&0\end{matrix}\right).$

2. **Матрица-столбец** — матрица, состоящая из одного столбца.

**Пример 3.** $M=\left(\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right)$.

3. Матрица размером *n* x *n* (число строк совпадает с числом столбцов) называется **квадратной** матрицей порядка *n*.

**Пример 4.** $A=\left(\begin{matrix}3&2&4\\1&8&0\\5&7&-2\end{matrix}\right) квадратная матрица 3-го порядка$.

Элементы, стоящие на главной диагонали квадратной матрицы (из левого верхнего угла в правый нижний), называются **главными диагональными элементами**. Сумма главных диагональных элементов называется **следом** **матрицы (Spur)**.

**Пример 5.** $A=\left(\begin{matrix}3&2&4\\1&8&0\\5&7&-2\end{matrix}\right)$. Sp *A* = 3 + 8 – 2 = 9 (след матрицы).

Элементы, стоящие на побочной диагонали квадратной матрицы (из правого верхнего угла в левый нижний), называются **побочными диагональными элементами**.

**Пример 6.** $A=\left(\begin{matrix}3&2&4\\1&8&0\\5&7&-2\end{matrix}\right)$.

**4**. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули, называется **единичной матрицей**.

**Пример 7.** $E=\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$.

**5.** Квадратная матрица, у которой все элементы выше главной диагонали равны нулю, называется **нижне-треугольной** (или просто треугольной).

**Пример 8.** $A=\left(\begin{matrix}3&0&0\\1&8&0\\5&7&-2\end{matrix}\right)$.

**6.** Квадратная матрица, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю, называется **верхне-треугольной** (или просто треугольной).

**Пример 9.** $A=\left(\begin{matrix}3&2&4\\0&8&1\\0&0&-2\end{matrix}\right)$.

**7.** Матрица, являющаяся одновременно нижне- и верхне-треугольной называется **диагональной**.

**Пример 10.** $A=\left(\begin{matrix}3&0&0\\0&8&0\\0&0&-2\end{matrix}\right)$.

**8.** Матрица, все элементы которой нули, называется **нулевой** и обозначается O.

**Пример 11.** $C=\left(\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right).$

**9**. Матрица, у которой *a*mn = *a*nm называется **симметрической**.

**Пример 12.** $A=\left(\begin{matrix}3&2&5\\2&8&6\\5&6&12\end{matrix}\right)$.

**Задание 2**

1. Установить соответствия матриц и их видов

|  |  |
| --- | --- |
| **Матрица** | **Вид матрицы** |
| $$D=\left(\begin{matrix}2&1&0\end{matrix}\right)$$ | Единичная |
| $$A=\left(\begin{matrix}4&5\\1&3\end{matrix}\right)$$ | Диагональная |
| $$B=\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$$ | Верхне-треугольная |
| $$C=\left(\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}\right)$$ | Симметрическая |
| $$M=\left(\begin{matrix}-1&4&6\\0&3&2\\0&0&1\end{matrix}\right)$$ | Матрица-столбец |
| $$N=\left(\begin{matrix}8&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$$ | Матрица размером 3 х 2 |
| $$P=\left(\begin{matrix}6&0&0\\8&8&0\\5&-7&2\end{matrix}\right)$$ | Квадратная второго порядка |
| $$K=\left(\begin{matrix}-2\\7\\4\end{matrix}\right)$$ | Нулевая |
| $$F=\left(\begin{matrix}1&8\\-6&2\\0&3\end{matrix}\right)$$ | Матрица-строка |
| $$Q=\left(\begin{matrix}8&4&7\\4&3&2\\7&2&1\end{matrix}\right)$$ | Нижне-треугольная |

2. Найти след матрицы для матриц M и B.

**Историческая справка**

Понятие матрицы впервые появилось в середине 19 века. Термин «матрица» вве Д. Сильвестр. Начала теории матриц содержит статья ирландского математика и физика У. Гамильтона (1805 – 1865) «Линейные и векторные функции» (1853). Основы матричного исчисления заложены А. Кели (1821 – 1895) в «Мемуаре о теории матриц» (1858). Современные обозначения — две вертикальные черточки — ввел английский математик А. Кели(1843 – 1845), а круглые скобки — английский математик Д. Коллис (1913).

**Контрольный тест по теме «Матрицы. Основные понятия»**

Даны матрицы:

$A=\left(\begin{matrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{matrix}\right)$, $B=\left(\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right)$, $C=\left(\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\end{matrix}\right)$, $ D=\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)$, $R=\left(\begin{matrix}-1&2\end{matrix}\right)$, $F=\left(\begin{matrix}2&4&1\\0&2&5\\0&0&2\end{matrix}\right)$,

$M=\left(\begin{matrix}8&4&2\\0&-2&6\\4&3&7\end{matrix} \begin{matrix}9\\1\\1\end{matrix}\right)$, $N=\left(\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}\right)$, $K=\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \begin{matrix}7\\4\end{matrix} \begin{matrix}-6\\2\end{matrix} \begin{matrix}8\\-4\end{matrix} \begin{matrix}-3\\-7\end{matrix}\right)$, $L=\left(\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right)$, $T=\left(\begin{matrix}2\\\begin{matrix}0\\\begin{matrix}-1\\7\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right).$

1) Выписать названия:

1. Матриц размером 3 х 4.

2. Матриц размером 5 х 1.

3. Матриц-строк.

4. Матриц-столбцов.

5. Диагональных матриц.

6. Квадратных матриц.

7. Единичных матриц.

8. Верхне-треугольных матриц.

9. Нулевых матриц.

10. Симметрических матриц.

2) Вычислить след всех квадратных матриц.

3) Выписать названия матриц, у которых *a*12 = 0.

4) Выписать матрицу с наименьшим количеством строк.

5) Выписать матрицу с наибольшим количеством столбцов.

6) Выписать главные диагональные элементы матрицы F.

7) Выписать побочные диагональные элементы матрицы A.