**Лекция 1. Основы теории комплексных чисел**

**1. Общие замечания**

*Напоминание*. Из курса математики известно, что в теории развития чисел выделяют следующие множества чисел:

**N** – множество **натуральных** чисел (1, 2. 3, …)

**Z** – множество **целых** чисел (натуральные + им противоположные и 0)

**Q** – множество **рациональных** чисел (числа, которые можно представить в виде $\frac{n}{m}$, где n, m ∈ Z)

**I** – множество **иррациональных** чисел (числа, которые нельзя представить в виде $\frac{n}{m}$, где n, m ∈ Z)

**R** – множество **действительных** (вещественных) чисел (рациональные и иррациональные числа). Изображают множество действительных чисел с помощью числовой прямой (числовой оси), с указанным направлением, началом отсчета и единичным отрезком.

0

1

**Комплексные** **числа** представляют собой расширение понятия действительных чисел. Исторически комплексные числа обязаны своим возникновением главным образом попыткам найти решения алгебраических уравнений. Обозначают множество комплексных чисел **C**.

**Пример 1**

Решить уравнение вида $x^{2}=-4$

Понятно, что данное уравнение в действительных числах не разрешимо. Зато во множестве комплексных чисел уравнение имеет решение. *Рассмотрим это решение после знакомства с комплексными числами.*

**2. Определение комплексного числа**

*Определение.* **Комплексным числом** называется всякая упорядоченная пара (*a*; *b*) действительных чисел *a* и *b*.

**Пример 2**

Примеры комплексных чисел: (8; 3), (– 6; 1), (1; 1), (0; 3), (8; 0).

**3. Равенство комплексных чисел**

*Определение.* Два комплексных числа (*a*; *b*) и (*c*; *d*) называются **равными** тогда и только тогда, когда *a* = *c* и *b* = *d*.

**Задание 1**

Указать среди комплексных чисел равные: (2; 1), (– 2; 1), (2; 1), (2; – 1), (– 2; – 1).

**3. Изображение комплексных чисел**

Так как всякое комплексное число — это упорядоченная пара действительных чисел (*a*; *b*), то каждой такой паре можно сопоставить точку с координатами (*a*; *b*) в прямоугольной системе координат. При этом плоскость называется комплексной плоскостью, число *a* откладывается на оси *Ox* — действительной оси, а число *b* откладывается на оси *Oy* — мнимой оси. В некоторых случаях комплексным числом удобно считать вектор, который получится если соединить начало системы координат с числом (*a*; *b*).

**Задание 2**

Отметьте в прямоугольной системе координат следующие комплексные числа: (8; 3), (– 6; 1), (1; 1), (0; 3), (8; 0). Постройте векторы, соответствующие этим комплексным числам.

**4. Арифметические операции над комплексными числами**

1) *Суммой комплексных чисел* *z* = (*a*; *b*) и *w* = (*c*; *d*) называется комплексное число (*a* + *c*; *b* + *d*), т. е.

(*a*; *b*) + (*c*; *d*) = (*a* + *c*; *b* + *d*).

**Пример 3**

(2; 7) + (3; – 4) = (2 + 3; 7 – 4) = (5; 3).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Определение. Комплексным нулем* считают пару (0; 0).

*Определение.* Числом, *противоположным* числу *z* = (*a*; *b*), считают число (– *a*; – *b*); обозначают его – *z*.

**Задание 3**

Какое комплексное число надо прибавить к числу (2; –4) чтобы в ответе был получен комплексный ноль.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2) *Разностью комплексных чисел* *z* = (*a*; *b*) и *w* = (*c*; *d*) называется комплексное число (*a* – *c*; *b* – *d*), т. е.

(*a*; *b*) – (*c*; *d*) = (*a* – *c*; *b* – *d*).

3) *Произведением комплексных чисел* *z* = (*a*; *b*) и *w* = (*c*; *d*) называется комплексное число (*ac* – *bd*; *ad* + *bc*), т. е.

(*a*; *b*) · (*c*; *d*) = (*ac* – *bd*; *ad* + *bc*).

**Пример 4**

Произведение комплексных чисел *z* = (2; 5) и = (3; 1) будет определяться следующим образом:

*z w* = (2·3 – 5·1; 2·1 + 5·3) = (1; 17).

4) Частным от деления комплексных чисел *z* = (*a*; *b*) и *w* = (*c*; *d*), причем (*c*; *d*) ≠ (0; 0), называется число

$$\frac{\left(a;b\right)}{\left(c;d\right)}=\left(\frac{ac+bd}{c^{2}+d^{2}}+\frac{bc-ad}{c^{2}+d^{2}}\right).$$

**Пример 5**

Пример деления двух комплексных чисел

$$\frac{\left(2;3\right)}{\left(1;4\right)}=\left(\frac{2∙1+3∙4}{1^{2}+4^{2}};\frac{3∙1-2∙4}{1^{2}+4^{2}}\right)=\left(\frac{14}{17};-\frac{5}{17}\right).$$

**5. Алгебраическая форма комплексного числа**

Используя введенные определения сложения и умножения комплексных чисел, легко получить следующие равенства:

(0; 1) · (0; 1) = (–1; 0), (1)

(*a*; *b*) = (*a*; 0) + (*b*; 0)·(0; 1), (2)

(*a*; 0) + (*b*; 0) = (*a +* *b; 0*), (3)

(*a*; 0) · (*b*; 0) = (*ab;* 0). (4)

**Задание 4.** Проверить справедливость этих четырех равенств.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Условимся вместо комплексного числа (*a*; 0) писать просто *a*, а комплексное число (0; 1) обозначать буквой *i* и называть *мнимой единицей*.

Итак, (*a*; 0) = *a* и(0; 1) = *i (мнимая единица).*

Тогда, равенство (1) (0; 1)·(0; 1) = (–1; 0), принимает вид *i* · *i* = – 1, т. е.

*i*2 = –1,

а равенство (2) (*a*; *b*) = (*a*; 0) + (*b*; 0)·(0; 1), принимает вид (*a*; *b*) *= a + bi.*

*Определение.* Запись (*a*; *b*) *= a + bi*  называется *алгебраической формой комплексного числа* *z* = (*a*; *b*); при этом число *a* называется действительной частью комплексного числа *z*, а *bi* — его *мнимой частью*.

**Пример 6.** Алгебраическая форма записи комплексных чисел:

(2; 3) = 2 + 3*i,*

 (2; – 4) = 2 – 4*i,*

– 7 + $\sqrt{3}i$ = (–7; $\sqrt{3})$.

Если мнимая часть комплексного числа *a + bi* отлична от нуля, то такое число называется *мнимым*; если при этом *a* = 0, т. е. число имеет вид *bi*, то оно называется *чисто* *мнимым*; наконец, если у комплексного числа *a + bi*  мнимая часть равна нулю, то получается действительное число *a*.

**Задание 5**

Как называются следующие комплексные числа:

(0; 0), (0; 1), (6; 5), (0; –2), (– 4; 0).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**6. Операции над комплексными числами в алгебраической форме**

1) *Сложение*

По определению (*a*; *b*) + (*c*; *d*) = (*a* + *c*; *b* + *d*), откуда (*a + bi*) *+* (*c + di*) = (*a* + *c*) *+* (*b* + *d*)*i.*

2) *Вычитание*

По определению (*a*; *b*) – (*c*; *d*) = (*a* – *c*; *b* – *d*), откуда (*a + bi*) *–* (*c + di*) = (*a* – *c*) *+* (*b* – *d*)*i.*

3) *Умножение*

По определению (*a*; *b*) · (*c*; *d*) = (*ac* – *bd*; *ad* + *bc*), откуда (*a + bi*) *·* (*c + di*) = (*ac* – *bd*) *+* (*ad* + *bc*)*i.*

4) *Деление*

По определению

$$\frac{\left(a;b\right)}{\left(c;d\right)}=\left(\frac{ac+bd}{c^{2}+d^{2}};\frac{bc-ad}{c^{2}+d^{2}}\right), откуда \frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^{2}+d^{2}};\frac{bc-ad}{c^{2}+d^{2}}i.$$

***Замечание***. Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь что *i*2 = – 1.

**Задание 6**

Даны комплексные числа: m = (3; – 1) и n = (2; – 4). Найти: m + n; m – n; mn; m/n.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**7. Сопряженные комплексные числа. Модуль комплексного числа**

*Определение.* Под комплексным числом, *сопряженным* к числу *z* = *a + bi,* понимаюткомплексное число, которое отличается от числа *z* только знаком мнимой части, т. е. числа *a + bi и a – bi — сопряженные.*

***Замечание.*** *Произведение двух сопряженных комплексных чисел равно сумме квадратов действительной и мнимой частей этих чисел.*

(*a + bi*) *·* (*a – bi*) = (*a*2 – *b*2*i*2) + (*abi* – *abi*) = *a*2 + *b*2

*Модуль* |z| комплексного числа *z* = *a + bi* есть неотрицательное действительное число

$$\left|z\right|=\sqrt{\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)}=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$$

**Пример 7**

Найти модуль комплексного числа 2 + 3*i*

*Решение*

$$\left|2+3i\right|=\sqrt{\left(2+3i\right)\left(2-3i\right)}=\sqrt{2^{2}+3^{2}}=\sqrt{13}$$

Ответ:$\sqrt{13}$

**8. Решение алгебраических уравнений**

**Пример 8.** Решить уравнение *x*2 – 4*x* +13 = 0.

*Решение*

*x*2 – 4*x* +13 = 0.

*D* = *b*2 – 4*ac* = 16 – 52 = – 36 (в множестве действительных чисел уравнение решений не имеет).

Найдем комплексные корни уравнения, используя равенство *i*2 = – 1.

$$x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{4\pm \sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm \sqrt{36∙(-1)}}{2}=\frac{4\pm 6\sqrt{i^{2}}}{2}=2\pm 3i$$

Ответ: *x*1,2 = 2 ±3*i*

**Задание 7**

Решить уравнение из **Примера 1**

 $x^{2}=-4$.

**Самостоятельная работа**

Составить конспект, в котором рассмотреть следующие темы, связанные с комплексными числами:

1. Тригонометрическая и показательная форма записи комплексных чисел.

2. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно.

3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.