Лекция 8. Функции и пределы

1. История вопроса

До XVII века математика была наукой о постоянных величинах. Введение переменных величин связано с именем французского ученого Декарта. Его работы получили высокую оценку Ф. Энгельса, который говорил: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная* величина. Благодаря этому в математику вошли *движение и диалектика*».

Термин «функция» появился в одной из работ немецкого ученого Лейбница (1646—1716).

Понятие функции ученые XVII и XVIII веков вводили по-разному. Одни определяли функцию как некое «аналитическое выражение», другие связывали понятие функции с «произвольно начерченной кривой». Идею соответствия, как единственную основу понятия функции, подчеркнул в своем определении немецкий математик *Дирихле* (1805—1859). ***y*** есть функция от ***x***, говорил он, если всякому значению ***x*** соответствует вполне определенное значение ***y***, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие. Еще до Дирихле идею соответствия высказал основатель неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Однако долгое время это оставалось незамеченным в математике.

Привычное для нас обозначение функции $y = f(x)$ принадлежит Эйлеру.

Определение предела впервые появилось в XVII веке. Зачатки теории пределов можно обнаружить, например, и работах английского физика и математика

Исаака Ньютона (1642—1727). Однако математики XVII и XVIII веков не ставили своей задачей построить стройную теорию пределов. Эта задача была поставлена и решена лишь в XIX веке. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши (1789—1857). Он развил теорию пределов и положил ее в основу построения одного из важнейших разделов математики — *математического анализа*.

Теория пределов — это один из разделов математического анализа. Вопрос решения пределов является достаточно обширным, поскольку существуют десятки приемов решений пределов различных видов. Существуют десятки нюансов и хитростей, позволяющих решить тот или иной предел. Попробуем разобраться в основных типах пределов, которые наиболее часто встречаются на практике.

2. Понятие предела функции в точке

Предел — одно из основных понятий математического анализа. Различают *предел последовательности* и *предел функции*.

Мы будем рассматривать только предел функции в точке.

Пусть дана функция $y = f(x)$, точка $x = a$. Пусть значение функции в этой точке существует и равно b, тогда говорят, что существует **предел** функции при $x \to a$ и этот предел равен b (рис. 1).

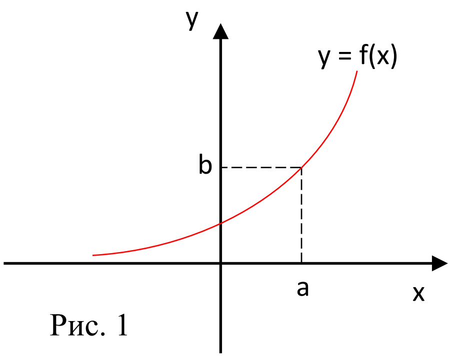

Рис. 1

В записи определение будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Видим, что запись предела состоит из трех частей:

1) значка предела lim (сокращение латинского слова limes — предел и равнозначного французского limite). Но, использовать при чтении предела слово лимит— не принято.

2) записи под значком предела, в данном случае $x \to a$. Запись читается «икс стремится к a». Чаще всего – именно x, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. На месте a может находиться совершенно любое число, а также бесконечность ($+\infty$ «плюс бесконечность» либо $-\infty$ «минус бесконечность»);

3) функции под знаком предела, в данном случае $f(x)$.

Пример 1. Прочитать запись $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+4x-12}{x+4}$

Решение. Предел функции $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x+4}$ при «икс» стремящемся к 1.

Теперь разберем следующий важный вопрос — а что значит выражение «икс стремится к единице»? И что вообще такое «стремится»?

Понятие предела — это понятие, если так можно сказать, динамическое.

Построим последовательность: сначала $x = 1{,}1$; затем $x = 1{,}01$; $x = 1{,}001$; $x = \ldots$; $x = 1{,}00000001$; …. То есть выражение «икс стремится к единице» следует понимать так — «икс» принимает значения, которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают.

Замечание. Строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.

3. Вычисление пределов

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, напрашивается просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-12}{x+4} = \frac{1+4-12}{1+4} = -\frac{7}{5}$$

Метод прямой подстановки

Итак, **<u>правило первое</u>**. Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

Задание 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2+11x+15}{x+3}$ б) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{3x^2+2x-8}{x+2}$ в) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{6x^2+5x-1}{x+\frac{1}{2}}$

Пример 2. Рассмотрим пример с бесконечностью.

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)$

Решение. Разбираемся, что такое $x \to +\infty$. Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x = 10$, потом $x = 100$, потом $x = 1000$, затем $x = 10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $y = f(x)$? Если в функцию вместо x подставить $+\infty$, то очевидно, что сама функция будет стремиться к $-\infty$.

Значит, $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - x) = -\infty$.

Пример 3. Еще один предел с бесконечностью.

Вычислить $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - 2x - 3)$.

Решение. Опять начинаем увеличивать *x* до бесконечности, и смотрим на поведение функции:

если *x* = 10, то;

если *x* = 100, то;

если *x* = 1000, то;

…

$\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - 2x - 3) = +\infty$.

Задание 2. Попытайтесь мысленно проанализировать и запомнить следующие виды пределов:

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x - 99} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{5}{x^4 + x - 9} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{\sqrt{x + 7}} = 0$

Выводы:

1) Когда дан ЛЮБОЙ предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как

$$\lim_{x \to \infty}(x^4 + 8x + 10) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2} = \infty \text{ и т. д.}$$

Также обратите внимание на следующее. Даже если дан предел с большим числом в числителе, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1000000}{x^2}$, то все равно $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1000000}{x^2} = 0$, так как рано или поздно «икс» начнет принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними станет самым настоящим микробом.

3) И еще один крайне важный момент. В процессе оформления примеров ни в коем случае не допускайте неполной записи типа $\lim\sqrt{x + 4}$ — *это одна из самых скверных оплошностей!* Презумпция виновности студента утверждает, что он либо совсем не в теме, либо откуда-то впопыхах списал пример.

Здесь не указано, куда стремится «икс», и поэтому предел не имеет смысла $\lim\cancel{\sqrt{x + 4}}$.

Иными словами, НЕТ такого понятия, как «просто предел»! Предел функции может существовать (или не существовать) лишь в определённой точке (в частности, в точке *x* = –∞ или x = +∞).

Пример 4. А вот следующего предела не существует $\lim\limits_{x\to-5}\sqrt{x+4}$, так как под корнем получается отрицательное число.

Также не существует предела $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x+4}$, тут «икс» стремится к «минус бесконечности», и под корнем будет *бесконечно большое* отрицательное число.

В подобных случаях так и пишут в ответе, что предела не существует.

4. Основные теоремы о пределах. Линейность предела

Под термином «линейность» скрывается два очень простых свойства. Пусть x → (*значение «а» может быть любым, в том числе бесконечным*). Тогда справедливы следующие теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – константу-множитель k можно **вынести за знак предела**, при этом **значение предела не изменится** (*если, конечно, предел вообще существует в данной точке*)

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 2}x^2 = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$.

Внимание! Никаких десятичных дробей!

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{2}x^2\right) = \cancel{1{,}5\lim_{x\to 2}x^2} = \cancel{1{,}5\cdot 4} = 6.$$

Аксиома. В высшей математике все действия стремимся проводить в правильных и неправильных обыкновенных дробях.

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ – **предел суммы равен сумме пределов** (*если они, разумеется, существуют*). То же самое касается и разности, ибо разность можно представить в виде суммы: $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

3) $f(x) = g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (**теорема о предельном переходе в равенстве**). Если две функции принимают одинаковые значения в окрестности некоторой точки, то их пределы в этой точке совпадают.

4) $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (**теорема о предельном переходе в неравенстве).** Если значения функции $f(x)$ в окрестности некоторой точки не превосходят соответствующих значений функции $g(x)$, то предел функции $f(x)$ в этой точке не превосходит предела функции $g(x)$.

5) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ – **предел постоянной равен самой постоянной**.

6) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ – предел произведения равен произведению пределов (*если они, разумеется, существуют*).

7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ – **предел частного равен частному пределов** (*если пределы, существуют и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$)

5. Типовые пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Решение. Если просто подставить вместо x бесконечно большую величину, получим в числителе бесконечность и в знаменателе тоже – бесконечность. Таким образом, у нас имеется неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

В таком случае нужно использовать специальный прием решения.

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень x в числителе и знаменателе. В нашем случае эти степени совпадают и равны двум.

Итак, **метод решения следующий**: для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ нужно разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Оформим решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=$$

Применим теоремы о пределах и вспомним виды пределов, которые советовали запомнить в **Задании 2** (все пределы, выделенные красным цветом, стремятся к нулю).

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+3}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\lim\limits_{x\to\infty}3}=\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3}$$

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указывается неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прерывать решения для промежуточных объяснений.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. В рукописном варианте предел можно обвести и стрелкой указать к чему он стремится.

Пример 7. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень x в числителе 3.

Максимальная степень x в знаменателе 4.

Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму далее надо числитель и знаменатель разделить на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^4}+\frac{15x^2}{x^4}+\frac{9x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{6x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{5+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Пример 8. Вычислить предел функции $f(x)=\frac{3x^2+3x-5}{x+1}$ при x $\to\infty$

Решение. Видим, что использована другая формулировка задания, но его надо понимать как нахождение предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-5}{x-1}$$

При подстановке получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Максимальная степень x в числителе 2.

Максимальная степень x в знаменателе 1.

Старшая степень x равна двум, значит, будем делить числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0+0}{0-0}=\frac{3}{0}=\infty$$

Заметим, что подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Вывод. Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться либо *конечное число*, либо *ноль* либо *бесконечность*.

Задание 3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3-4x+3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+3x-2x^2-x^3}{2x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(4-7x^2)}{4x^{5-}7x^3+13xx+28}$

6. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и методы их решения

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но x стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 9. Вычислить предел

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Решение. Сначала попробуем подставить (– 1), получим

$$\frac{2(-1)^2-3(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

Таким образом, у нас выявилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Но! *Этот прием помог лишь выявить неопределенность — на самом деле x бесконечно близко приближается к (– 1), но вовсе* ***не принимает*** *это значение! И поэтому здесь подразумевается не два нуля, а деление* ***бесконечно малого*** *на* ***бесконечно малое*** *число.*

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем предел

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Для того, чтобы разложить числитель на множители, нужно решить соответствующее квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5$$

Сначала находим дискриминант:

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$

Дискриминант больше нуля, значит уравнение имеет два корня:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{3+\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$x_2=\frac{3-\sqrt{49}}{2\cdot 2}=-\frac{4}{4}=-1$$

Таким образом

$$2x^2-3x-5=2\big(x-(-1)\big)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)(2x-5)$$

Все. Числитель на множители разложен.

Знаменатель в нашем примере (x + 1) уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

Имеем:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}$$

Сокращаем дробь на (x + 1), получим

$$\lim_{x\to-1}(2x-5)=2\cdot(-1)-5=-7$$

Пример 10. Вычислить предел

$$\lim_{x\to2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

$8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

$x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$

D = 16 + 48 = 64

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{64}}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{64}}{2}=-6$$

Возвращаемся к пределу

$$\lim_{x\to2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\lim_{x\to2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+6)}=2\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x-2)(x+6)}=-2\lim_{x\to2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=$$

$$-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Задание 4. Вычислить следующие пределы

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$

7. Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни:

Пример 11. Найти предел

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

Начинаем решать.

Сначала попробуем подставить 3 в выражение под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

Как вы заметили, у нас в числителе находится разность корней. От корней в математике принято избавляться.

Правило. Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

Вспоминаем формулу сокращенного выражения – разность квадратов:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое в данном случае и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное (числителю) выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-\left(\sqrt{10x-21}\right)^2}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+6)-(10x-21)}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}\right)}=$$

В знаменателе осталась сумма корней. Превратим ее в постоянное число. Подставим под корни значение $x=3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot 6}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15}$$

Осталось разложить числитель и знаменатель на множители, как мы делали ранее

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)=-\frac{9}{30}=-\frac{3}{10}$$

Задание 5. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{1-\sqrt{3-x}}$

Контрольные вопросы

1. Что такое предел функции в точке?
2. Что такое метод непосредственной подстановки при вычислении пределов?
3. Какие теоремы о пределах можно сформулировать?
4. Как раскрывают неопределенности при вычислении пределов?