**Лекция 6. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера (методом Крамера)**

**1. Описание метода Крамера**

Метод Крамера — это метод решения систем линейных уравнений. Он применяется только к системам линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель отличен от нуля.

**Метод Крамера**

Пусть дана система трех линейных уравнений:

(1)

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}x\_{1}+\\a\_{21}x\_{1}+\\a\_{31}x\_{1}+\end{array}\right.\begin{matrix}a\_{12}x\_{2}+\\a\_{22}x\_{2}+\\a\_{32}x\_{2}+\end{matrix}\begin{matrix}a\_{13}x\_{3}=\\a\_{23}x\_{3}=\\a\_{33}x\_{3}=\end{matrix}\begin{matrix}b\_{1}\\b\_{2}\\b\_{3}\end{matrix}$$

Для решения системы линейных уравнений методом Крамера из коэффициентов при неизвестных составляется главный определитель системы Δ.

Для системы (1) главный определитель имеет вид:

$$∆ =\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$$

Далее составляются определители по переменным $∆\_{x\_{1}}, ∆\_{x\_{2}}, ∆\_{x\_{3}}$. Для этого в главном определителе вместо столбца коэффициентов при соответствующей переменной записывается столбец свободных членов, то есть

$∆\_{x\_{1}} =\left|\begin{matrix}b\_{1}&a\_{12}&a\_{13}\\b\_{2}&a\_{22}&a\_{23}\\b\_{3}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|, ∆\_{x\_{2}} =\left|\begin{matrix}a\_{11}&b\_{1}&a\_{13}\\a\_{21}&b\_{2}&a\_{23}\\a\_{31}&b\_{3}&a\_{33}\end{matrix}\right|, ∆\_{x\_{3}} =\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&b\_{1}\\a\_{21}&a\_{22}&b\_{2}\\a\_{31}&a\_{32}&b\_{3}\end{matrix}\right|$

Тогда решение системы находится по формулам Крамера

$x\_{1}=\frac{∆\_{x\_{1}}}{∆}, x\_{2}=\frac{∆\_{x\_{2}}}{∆}, x\_{3}=\frac{∆\_{x\_{3}}}{∆} $

Следует отметить, что если

1) главный определитель *∆* ≠ 0, тосистема имеет единственное решение (*x*1, *x*2, *x*3);

2) если*.* ∆ = 0 и ∆x1 = 0, ∆x2 = 0, ∆x3 = 0, то система имеет бесчисленное множество решений, найти которые по формулам Крамера нельзя;

3) если ∆ = 0  и ∆x1 ≠ 0, ∆x2 ≠ 0, ∆x3 ≠ 0, то система уравнений несовместна, то есть решений не имеет.

**2. Примеры решений систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера**

**Пример 1**

Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+\\2x\_{1}+\\2x\_{1}-\end{array}\right.\begin{matrix}2x\_{2}-\\x\_{2}+\\3x\_{2}\end{matrix}\begin{matrix}x\_{3}=\\x\_{3}=\\=\end{matrix}\begin{matrix}2\\1\\-8\end{matrix}$$

*Решение*

1) Составим и вычислим главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных.

$$∆ =\left|\begin{matrix}1&2&-1\\2&1&1\\2&-3&0\end{matrix}\right|=1·1·0+2·1·2+2·\left(-3\right)·\left(-1\right)-2·1·\left(-1\right)-2·2·0-1·\left(-3\right)·1=$$

= 0 + 4 + 6 + 2 – 0 + 3 = 15 ≠ 0, следовательно, система имеет единственное решение.

2) Составим и вычислим вспомогательные определители, заменяя соответствующий столбец в Δ столбцом из свободных членов.

$$∆\_{x\_{1}} =\left|\begin{matrix}2&2&-1\\1&1&1\\-8&-3&0\end{matrix}\right|=$$

$$=2·1·0+2·1·\left(-8\right)+1·\left(-3\right)·\left(-1\right)-\left(-8\right)·1·\left(-1\right)-2·1·0-1·\left(-3\right)·2=-15$$

$$∆\_{x\_{2}} =\left|\begin{matrix}1&2&-1\\2&1&1\\2&-8&0\end{matrix}\right|=$$

$$=1·1·0+2·1·2+2·\left(-8\right)·\left(-1\right)-\left(-1\right)·1·2-2·2·0-1·\left(-8\right)·1=30$$

$$∆\_{x\_{3}} =\left|\begin{matrix}1&2&2\\2&1&1\\2&-3&-8\end{matrix}\right|=$$

$$=1·1·(-8)+2·1·2+2·\left(-3\right)·2-2·1·2-2·2·(-8)-1·\left(-3\right)·1=15$$

По формулам Крамера находим неизвестные:

$x\_{1}=\frac{-15}{15}=-1, x\_{2}=\frac{30}{15}=2, x\_{3}=\frac{15}{15}=1 $

Сделаем проверку, чтобы убедиться в правильности решения. Для этого подставим полученные решения в систему (1), получим:

–1 + 2·2 – 1 = 2, 2 = 2

2· (–1) + 2 + 1 = 1, 1 = 1

2·(–1) – 3· 2 = – 8, –8 = –8

*Ответ****:*** *x*1 = –1, *x*2 = 2, *x*3 = 1.

**Пример 2**

Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+\\3x\_{1}-\\2x\_{1}-\end{array}\right.\begin{matrix}x\_{2}+\\x\_{2}+\\2x\_{2}+x\_{3}\end{matrix}\begin{matrix}x\_{3}=\\2x\_{3}=\\=\end{matrix}\begin{matrix}-3\\2\\0\end{matrix}$$

*Решение****:***

1) Составим и вычислим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$∆=\left|\begin{matrix}1&1&1\\3&-1&2\\2&-2&1\end{matrix}\right|=0$ (**Задание 1**. Проверить это.)

Следовательно, можно предположить, что система не имеет решения или имеет бесчисленное множество решений. Уточним это в следующем шаге.

2) Составим и вычислим вспомогательные определители, заменяя соответствующий столбец в Δ столбцом из свободных членов:

$∆\_{x\_{1}}=\left|\begin{matrix}-3&1&1\\2&-1&2\\0&-2&1\end{matrix}\right|=-15$ (**Задание 2**. Проверить это.)

Остальные вспомогательные определители можно не вычислять, так как уже один из вспомогательных определителей отличен от нуля, следовательно, система несовместна, т.е. не имеет решений.

*Ответ:* нет решений.

**Задание 3**

Решить данные системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера. Сделать проверку.

$$а) \left\{\begin{array}{c}x+\\3x+\\-2x+\end{array}\right.\begin{matrix}y-\\7y+\\2y-3z\end{matrix}\begin{matrix}z=\\z=\\=\end{matrix}\begin{matrix}6\\2\\-1\end{matrix}$$

$$б) \left\{\begin{array}{c}x+\\4x+\\3x+\end{array}\right.\begin{matrix}y-\\5y+\\3y-5z\end{matrix}\begin{matrix}2z=\\4z=\\=\end{matrix}\begin{matrix}6\\-3\\8\end{matrix}$$

$$в) \left\{\begin{array}{c}-2x+\\x+\\4x-\end{array}\right.\begin{matrix}3y-\\y+\\3y-z\end{matrix}\begin{matrix}2z=\\z=\\=\end{matrix}\begin{matrix}4\\-7\\6\end{matrix}$$

**Контрольные вопросы:**

1. Каков алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера?

2. Каким будет решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера в зависимости от значения главного и вспомогательных определителей этой системы?