**Лекция 5. Решение систем линейных уравнений**

**1. Матричный метод решения систем линейных уравнений**

**Основные понятия**

Имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\left\{\begin{matrix}a\_{11}x\_{11}+a\_{12}x\_{12}+…+a\_{1n}x\_{1n}=\\a\_{21}x\_{21}+a\_{22}x\_{22}+…+a\_{2n}x\_{2n}=\\\begin{matrix}… + … + … + … =\\a\_{n1}x\_{n1}+a\_{11}x\_{11}+…+a\_{11}x\_{11}=\end{matrix}\end{matrix}\right. \begin{matrix}b\_{1}\\b\_{2}\\\begin{matrix}…\\b\_{n}\end{matrix}\end{matrix}$$

В матричной форме система записывается как ***A* · *X* = *B***, где

$A=\left(\begin{matrix}a\_{11}\\a\_{21}\\\begin{matrix}…\\a\_{n1}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}a\_{12}\\a\_{22}\\\begin{matrix}...\\a\_{n2}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}…\\…\\\begin{matrix}…\\…\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}a\_{1n}\\a\_{2n}\\\begin{matrix}…\\a\_{nn}\end{matrix}\end{matrix}\right) $– основная матрица системы,

$B=\left(\begin{matrix}b\_{11}\\b\_{21}\\\begin{matrix}…\\b\_{n1}\end{matrix}\end{matrix} \right)$– матрица свободных членов,

$X=\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\\begin{matrix}…\\x\_{n1}\end{matrix}\end{matrix} \right)$ – матрица-столбец неизвестных переменных.

Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле ***X* = *A*–1 ·*B,*** *где A*–1 – обратная матрица для основной матрицы системы *A***.**

**Обратная матрица**

*Определение***.** Матрица*A*–1 называется обратной для матрицы *A*, если *A*–1·*A = E (единичной матрице).*

**Нахождение обратной матрицы**

Обратная матрица для матрицы A находится по формуле $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}∙\left‖A\_{ij}\right‖^{T}$ , где $\left‖A\_{ij}\right‖^{T}$– транспонированная матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения $A\_{ij}, \left|A\right|=∆-определитель матрицы .$

*Алгоритм нахождения обратной матрицы* с использованием равенства $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}∙\left‖A\_{ij}\right‖^{T}$

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).

2. Строим матрицу $\left‖A\_{ij}\right‖$ – матрицу из алгебраических дополнений элементов *a*ij.

3. Транспонируем матрицу $\left‖A\_{ij}\right‖$, тем самым получаем $\left‖A\_{ij}\right‖^{T}.$

4. Умножаем каждый элемент матрицы $\left‖A\_{ij}\right‖^{T}на число \frac{1}{\left|A\right|}.$ Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы *A*–1.

5. Проводим проверку результата, вычисляя произведения *A*–1·*A и A*· *A*–1. Если *A*–1·*A =A*· *A*–1*= E,* то обратная матрица найдена верно, в противном случае была допущена ошибка.

**Пример нахождения обратной матрицы**

Дана матрица $A=\left(\begin{matrix}3&4&-2\\-2&1&0\\2&3&0\end{matrix}\right)$. Найти обратную матрицу.

*Решение*

1. Вычисляем определитель матрицы $\left|A\right|=\left|\begin{matrix}3&4&-2\\-2&1&0\\2&3&0\end{matrix}\right|$= (–2)·(–1)3·$\left|\begin{matrix}4&-2\\3&0\end{matrix}\right|$+1·(–1)4·$\left|\begin{matrix}3&-2\\2&0\end{matrix}\right|$ = 2·(0 + 6) + (0 + 4) = 12 + 4 = 16. Определитель отличен от нуля, это означает, что матрица обратима. (В случае равенства определителя нулю система не разрешима матричным методом).

2. Находим матрицу из алгебраических дополнений

$$\left‖A\_{ij}\right‖=\left(\begin{matrix}A\_{11}&A\_{12}&A\_{13}\\A\_{21}&A\_{22}&A\_{23}\\A\_{31}&A\_{32}&A\_{33}\end{matrix}\right)$$

$$A\_{11}=(-1)^{1+1}∙\left|\begin{matrix}1&0\\3&0\end{matrix}\right|=0-0=0$$

$$A\_{12}=(-1)^{1+2}∙\left|\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right|=(–1)∙(0-0)=0$$

$$A\_{13}=(-1)^{1+3}∙\left|\begin{matrix}-2&1\\2&3\end{matrix}\right|=\left(–6-2\right)=-8$$

$$A\_{21}=(-1)^{2+1}∙\left|\begin{matrix}4&-2\\3&0\end{matrix}\right|=\left(-1\right)∙\left(0+6\right)=-6$$

$$A\_{22}=(-1)^{2+2}∙\left|\begin{matrix}3&-2\\2&0\end{matrix}\right|=0+4=4$$

$$A\_{23}=(-1)^{2+3}∙\left|\begin{matrix}3&4\\2&3\end{matrix}\right|=\left(-1\right)∙\left(9-8\right)=-1$$

$$A\_{31}=(-1)^{3+1}∙\left|\begin{matrix}4&-2\\1&0\end{matrix}\right|=0+2=2$$

$$A\_{32}=(-1)^{3+2}∙\left|\begin{matrix}3&-2\\-2&0\end{matrix}\right|=(-1)∙(0-4)=4$$

$$A\_{33}=(-1)^{3+3}∙\left|\begin{matrix}3&4\\-2&1\end{matrix}\right|=3+8=11$$

Таким образом

$$\left‖A\_{ij}\right‖=\left(\begin{matrix}0&0&-8\\-6&4&-1\\2&4&11\end{matrix}\right)$$

Выполним транспонирование матрицы из алгебраических дополнений

$$\left‖A\_{ij}\right‖^{T}=\left(\begin{matrix}0&-6&2\\0&4&4\\-8&-1&11\end{matrix}\right)$$

Теперь найдем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}∙\left‖A\_{ij}\right‖^{T}=\frac{1}{16}∙\left(\begin{matrix}0&-6&2\\0&4&4\\-8&-1&11\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&-\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{16}&\frac{11}{16}\end{matrix}\right)$$

Проверяем полученный результат

$$A∙A^{1}=\left(\begin{matrix}3&4&-2\\-2&1&0\\2&3&0\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}0&-\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{16}&\frac{11}{16}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0+0+1&-\frac{9}{8}+1+\frac{1}{8}&\frac{3}{8}+1-\frac{22}{16}\\0+0+0&\frac{6}{8}+\frac{1}{4}+0&-\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+0\\0+0+0&-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0&\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0\end{matrix}\right)=$$

$\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$ = E

**Задание 1**

Аналогично проверьте равенство *A*–1·*A* и сделайте вывод*.*

**Пример решения системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.**

$$\left\{\begin{matrix}3x\_{1}-&2x\_{2}=&\frac{5}{6}\\2x\_{1}+&3x\_{2}=&2\end{matrix}\right.$$

В матричной форме исходная система примет вид *A · X = B*, где

$$A=\left(\begin{matrix}3&-2\\2&3\end{matrix}\right), X=\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\end{matrix}\right), B=\left(\begin{matrix}\frac{5}{6}\\2\end{matrix}\right)$$

Решением системы будет *X* = *A*–1 · *B*

Найдем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}∙\left(\begin{matrix}A\_{11}&A\_{12}\\A\_{21}&A\_{22}\end{matrix}\right)^{T}$

1. Вычислим определитель основной матрицы

$$\left|A\right|=\left|\begin{matrix}3&-2\\2&3\end{matrix}\right|=9+4=13\ne 0$$

2. Составим матрицу из алгебраических дополнений

$\left(\begin{matrix}(-1)^{1+1}∙3&(-1)^{1+2}∙2\\(-1)^{2+1}∙(-2)&(-1)^{2+2}∙3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}3&-2\\2&3\end{matrix}\right)$ и транспонируем ее $\left(\begin{matrix}3&2\\-2&3\end{matrix}\right)$

3. Умножим транспонированную матрицу на множитель вида $\frac{1}{\left|A\right|}=\frac{1}{13}$

$\frac{1}{13}∙\left(\begin{matrix}3&2\\-2&3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{3}{13}&\frac{2}{13}\\-\frac{2}{13}&\frac{3}{13}\end{matrix}\right)$ – обратная матрица найдена.

Отсюда *X* = *A*–1 · *B =* $\left(\begin{matrix}\frac{3}{13}&\frac{2}{13}\\-\frac{2}{13}&\frac{3}{13}\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}\frac{5}{6}\\2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{3}{13}∙\frac{5}{6}+\frac{2}{13}∙2\\-\frac{2}{13}∙\frac{5}{6}+\frac{3}{13}∙2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{matrix}\right)$

Ответ:$x\_{1}=\frac{1}{2}, x\_{2}=\frac{1}{3}$

**Задание 2**

Выполнить проверку полученного решения, подставив его в матричную форму исходной системы уравнений ***A* · *X* = *B***

**Контрольные вопросы**

1. Какой вид имеет запись решения системы линейных алгебраических уравнений матричным методом?

2. Какая матрица называется обратной к данной матрице?

3. Как находится алгебраическое дополнение элемента?

4. Какова формула нахождения обратной матрицы?

4. Как проверить, что обратная матрица найдена верно?