**Лекция 4. Определители квадратных матриц и их свойства. Вычисление определителей**

**1. Определители**

*Определение*. Определителем (или детерминантом) квадратной матрицы *n*-го порядка называется число △*n*, записываемое в виде квадратной таблицы

$$∆\_{n}=\left|\begin{matrix}a\_{11}\\a\_{21}\\\begin{matrix}-\\\begin{matrix}…\\a\_{n1}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}a\_{12}\\a\_{22}\\\begin{matrix}-\\\begin{matrix}…\\a\_{n2}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}a\_{13}\\a\_{23}\\\begin{matrix}-\\\begin{matrix}…\\a\_{n3}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}…\\…\\\begin{matrix}-\\\begin{matrix}…\\…\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}a\_{1n}\\a\_{2n}\\\begin{matrix}-\\\begin{matrix}…\\a\_{nn}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right|$$

 и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам *aij* (*i, j* = 1, …, *n*), которые называются *элементами* определителя (всего их *n*2). Индекс *i* указывает номер строки, а *j* — номер столбца квадратной таблицы, на пересечении которых находится элемент *aij*.

**Примеры определителей 1**

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}5&9\\6&1\end{matrix}\right| ∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right| ∆\_{5}=\left|\begin{matrix}3&1&1\\8&-2&3\\\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\4\\3\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}8\\-6\\11\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}9\\5\\\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right| $$

Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом*.

*Главной диагональю определителя* называется совокупность элементов *a*11, *a*22, *a*33, …, *ann*.

**Обозначения определителей**

Для квадратной матрицы A *n*-го порядк обозначения ее определителя могут иметь вид:

|A|, det(A), $ ∆\_{A},$ $∆\_{n} $или просто ∆

**2. Минор элемента определителя**

*Определение*. **Минором** *Mi*j элемента *aij* называется определитель (n – 1)-го порядка △*n-*1, полученный из определителя n-го порядка △*n* вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

**Примеры миноров элементов определителей 2**

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}5&9\\6&1\end{matrix}\right| M\_{12}=\left|\begin{matrix}5&9\\6&1\end{matrix}\right|=6 $$

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right| M\_{32}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2&6\\4&3\end{matrix}\right|$$

$$∆\_{5}=\left|\begin{matrix}3&1&1\\8&-2&3\\\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\4\\3\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}8\\-6\\11\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}9\\5\\\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right| M\_{24}=\left|\begin{matrix}3&1&1\\8&-2&3\\\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\4\\3\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}8\\-6\\11\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}9\\5\\\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}3&1&1\\0&2&-1\\\begin{matrix}1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}5\\6\end{matrix}&\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}9\\1\\\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right|$$

**3. Алгебраическое дополнение элемента определителя**

*Определение*. **Алгебраическое дополнение** *Aij* элемента *aij* определяется равенством

***Aij*  = (– 1)*i+j* · *Mi*j или *Aij*  = (– 1)*i+jMi*j**

**Пример 3**

$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right| A\_{32}=\left(-1\right)^{3+2}M\_{32}=-$ $\left|\begin{matrix}2&6\\4&3\end{matrix}\right|$

**4. Вычисление определителей**

Значение определителя △*n* находится по следующему правилу.

*Для n = 2 (определитель второго порядка)*

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right|=a\_{11}∙a\_{22}-a\_{12}∙a\_{21}$$

Пример 4

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}5&9\\6&1\end{matrix}\right|=5∙1-9∙6=5-54=-49$$

*Для n = 3 (определитель третьего порядка)*

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=a\_{11}∙A\_{11}+a\_{12}∙A\_{12}+a\_{13}∙A\_{13}$$

где

*A*11 = (– 1)1+1· *M*11 $=\left|\begin{matrix}a\_{22}&a\_{23}\\a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

*A*12 = (– 1)1+2· *M*12 $=-\left|\begin{matrix}a\_{21}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

*A*13 = (– 1)1+3· *M*13 $=\left|\begin{matrix}a\_{21}&a\_{22}\\a\_{31}&a\_{32}\end{matrix}\right|$

**Пример 5**

 $∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=2∙A\_{11}+\left(-1\right)∙A\_{12}+6∙A\_{13}=2∙\left(-1\right)^{1+1}∙M\_{11}+\left(-1\right)∙\left(-1\right)^{1+2}∙M\_{12}+6∙\left(-1\right)^{1+3}∙M\_{13}=2∙\left(-1\right)^{2}∙\left|\begin{matrix}4&3\\0&7\end{matrix}\right|+\left(-1\right)∙\left(-1\right)^{3}∙\left|\begin{matrix}4&3\\1&7\end{matrix}\right|+6∙\left(-1\right)^{4}∙\left|\begin{matrix}4&4\\1&0\end{matrix}\right|=$

$$=2\left(4∙7-3∙0\right)+\left(4∙7-3∙1\right)+6\left(4∙0-4∙1\right)=2∙28+\left(28-3\right)+6∙\left(-4\right)=56+25-24=57$$

**Задание 1**

Вычислить определители

$$∆\_{2}=\left|\begin{matrix}3&-2\\1&5\end{matrix}\right|$$

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&7&-2\\3&-1&5\\5&0&7\end{matrix}\right|$$

**Другие способы вычисления определителей**

*Правило треугольников для вычисления определителя* △3

$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|=a\_{11}a\_{22}a\_{33}+a\_{12}a\_{23}a\_{31}+a\_{21}a\_{32}a\_{13}-(a\_{13}a\_{22}a\_{31}+a\_{12}a\_{21}a\_{33}$+$a\_{23}a\_{32}a\_{11}$)

Схематическая запись этого правила

**+ –**

$\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right|$

**Задание 2**

Вычислить определитель, используя правило треугольника

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&7&-2\\3&-1&5\\5&0&7\end{matrix}\right|$$

*Правило диагонали для вычисления определителя* △3 *(сводится к правилу треугольников)*

$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\\begin{matrix}a\_{31}\\a\_{11}\\a\_{21}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{32}\\a\_{12}\\a\_{22}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{33}\\a\_{13}\\a\_{23}\end{matrix}\end{matrix}\right|=a\_{11}a\_{22}a\_{33}+a\_{21}a\_{32}a\_{13}+a\_{31}a\_{12}a\_{23}-(a\_{13}a\_{22}a\_{31}+a\_{23}a\_{32}a\_{11}+a\_{33}a\_{12}a\_{21})$

Этим правилом легко воспользоваться при вычислении определителей более высоких порядков, например △5

**Задание 3**

Вычислить определитель

$$∆\_{5}=\left|\begin{matrix}3&1&1\\8&-2&3\\\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\4\\3\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}8\\-6\\11\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}9\\5\\\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\end{matrix}\right|$$

**5. Основные свойства определителей**

Свойство 1. Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю.

**Пример 6**

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|$$

Для элементов первого ряда

$$2∙A\_{11}+\left(-1\right)∙A\_{12}+6∙A\_{13}=2∙\left(-1\right)^{2}∙\left|\begin{matrix}4&3\\0&7\end{matrix}\right|+\left(-1\right)∙\left(-1\right)^{3}∙\left|\begin{matrix}4&3\\1&7\end{matrix}\right|+6∙\left(-1\right)^{4}∙\left|\begin{matrix}4&4\\1&0\end{matrix}\right|==2\left(4∙7-3∙0\right)+\left(4∙7-3∙1\right)+6\left(4∙0-4∙1\right)=2∙28+\left(28-3\right)+6∙\left(-4\right)=56+25-24=57$$

 Для элементов второго ряда
$$4∙A\_{21}+4∙A\_{22}+3∙A\_{23}=4∙\left(-1\right)^{3}∙\left|\begin{matrix}-1&6\\0&7\end{matrix}\right|+4∙\left(-1\right)^{4}∙\left|\begin{matrix}2&6\\1&7\end{matrix}\right|+3∙\left(-1\right)^{5}∙\left|\begin{matrix}2&-1\\1&0\end{matrix}\right|==-4\left(-1∙7-6∙0\right)+4\left(2∙7-6∙1\right)-3\left(2∙0-\left(-1\right)∙1\right)=-4∙\left(-7\right)+4\left(14-6\right)-3∙1=28+32-3=57$$

Для элементов третьего ряда

$$1∙A\_{31}+0∙A\_{32}+7∙A\_{33}=1∙\left(-1\right)^{4}∙\left|\begin{matrix}-1&6\\4&3\end{matrix}\right|+0+7∙\left(-1\right)^{6}∙\left|\begin{matrix}2&-1\\4&4\end{matrix}\right|==\left(-1∙3-6∙4\right)+7\left(2∙4-4∙\left(-1\right)\right)=-27+84=57$$

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=57 (вычислен выше)$$

57 = 57 = 57=57

Свойство 2. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот.

**Пример 7**

Имеем определитель $∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=57 $

Заменим в определителе строки соответствующими столбцами и вычислим определитель

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&4&1\\-1&4&0\\\begin{matrix}6\\2\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}3\\4\\4\end{matrix}&\begin{matrix}7\\1\\0\end{matrix}\end{matrix}\right|=2∙4∙7+\left(-1\right)∙3∙1+6∙4∙0-\left(1∙4∙6+0∙3∙2+7∙4∙\left(-1\right)\right)=56-3+0-\left(24+0-28\right)=53-4=57$$

57 = 57

Свойство 3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный.

**Пример 8**

В определителе $∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=57$ поменяем местами, например, верхний и нижний ряды местами и вычислим определитель

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}1&0&7\\4&4&3\\\begin{matrix}2\\1\\4\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}&\begin{matrix}6\\7\\3\end{matrix}\end{matrix}\right|=1∙4∙6+4∙\left(-1\right)∙7+2∙0∙3-\left(7∙4∙2+3∙\left(-1\right)∙1+6∙0∙4\right)=24-28+0-\left(56-3+0\right)=-4-53=-57$$

Свойство 4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

**Пример 9**

Вычислим определитель с одинаковыми параллельными рядами

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}1&0&7\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=1∙4∙7+4∙7∙0+1∙0∙3-\left(1∙4∙7+1∙0∙3+7∙0∙4\right)=28+0+0-28-0-0=0$$

Свойство 5. Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель умножится на это же число λ.

**Пример 10**

Имеем определитель, в котором в одном из рядов, элементы имеют общий множитель. Вычислим этот определитель

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}1&5&2\\4&10&3\\1&20&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&5∙1&2\\4&5∙2&3\\1&5∙4&0\end{matrix}\right|=1∙10∙0+1∙5∙3+2∙4∙20-\left(2∙10∙1+1∙3∙20+0∙5∙4\right)=0+15+160-20-60-0=95$$

Вынесем множитель за знак определителя и снова выполним вычисления

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}1&5&2\\4&10&3\\1&20&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&5∙1&2\\4&5∙2&3\\1&5∙4&0\end{matrix}\right|=5\left|\begin{matrix}1&1&2\\4&2&3\\1&4&0\end{matrix}\right|=5\left[1∙2∙0+2∙4∙4+1∙1∙3-(2∙2∙1+1∙3∙4+0∙1∙4)\right]=5\left[0+32+3-4-12-0\right]=5\left[19\right]=95$$

95 = 95

Свойство 6. Если элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

**Пример 11**

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}1&5&2\\4&1&3\\0&0&0\end{matrix}\right|=1∙1∙0+2∙4∙0+0∙5∙3-\left(2∙1∙0+1∙3∙0+0∙5∙4\right)=0+0+0-0-0-0=0$$

Свойство 7. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.

Свойство 8. Сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.

**Пример 12**

$$Имеем пределитель ∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|$$

 Найдем сумму произведений элементов верхнего ряда и алгебраических дополнений соответствующих элементов параллельного нижнего ряда.

$$2∙A\_{31}+\left(-1\right)∙A\_{32}+6∙A\_{33}=2∙\left(-1\right)^{4}\left|\begin{matrix}-1&6\\4&3\end{matrix}\right|-\left(-1\right)^{5}∙\left|\begin{matrix}2&6\\4&3\end{matrix}\right|+6∙\left(-1\right)^{6}∙\left|\begin{matrix}2&-1\\4&4\end{matrix}\right|=2\left(-3-24\right)+\left(6-24\right)+6\left(8+4\right)=-54-18+72=-72+72=0$$

Свойство 9. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых.

**Пример 13**

$$Имеем пределитель ∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\4&4&3\\1&0&7\end{matrix}\right|=57$$

Представим элементы среднего ряда в виде суммы двух слагаемых следующим образом

$$∆\_{3}=\left|\begin{matrix}2&-1&6\\2+2&1+3&2+1\\1&0&7\end{matrix}\right|$$

По свойству должно выполняться равенство

$$\left|\begin{matrix}2&-1&6\\2&1&2\\1&0&7\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}2&-1&6\\2&3&1\\1&0&7\end{matrix}\right|=57$$

Проверим это

$$\left|\begin{matrix}2&-1&6\\2&1&2\\1&0&7\end{matrix}\right|=14-2+0-6-0+14=20$$

$\left|\begin{matrix}2&-1&6\\2&3&1\\1&0&7\end{matrix}\right|=42+0-1-18-0+14=37$, т.е. 57 = 20 + 37

Свойство 10. Определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ.

**Задание 4**

Проверьте это свойство самостоятельно.

**Задание 5**

1. Вычислить определитель одним из описанных в лекции способом:

а) $\left|\begin{matrix}-1&3&2\\2&8&1\\1&1&2\end{matrix}\right|$

б) $\left|\begin{matrix}5&2&1\\0&3&0\\\begin{matrix}2\\0\end{matrix}&\begin{matrix}-1\\6\end{matrix}&\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}-1\\3\\\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\end{matrix}\right|$

2. Вычислить определители:

а) $\left|\begin{matrix}15325&15323&37527\\23735&23735&17417\\23737&23737&17418\end{matrix}\right|$

б) $\left|\begin{matrix}2\\-1\\\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}4\\2\\\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}-1\\3\\\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\1\\\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\end{matrix}\right|$

в) $\left|\begin{matrix}1\\0\\\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}2\\2\\\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}3\\5\\\begin{matrix}3\\-6\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}4\\9\\\begin{matrix}7\\0\end{matrix}\end{matrix}\right|$

г) $\left|\begin{matrix}7&8&5\\10&11&6\\\begin{matrix}5\\6\\7\end{matrix}&\begin{matrix}3\\7\\10\end{matrix}&\begin{matrix}6\\5\\7\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}5\\7\\\begin{matrix}2\\4\\5\end{matrix}\end{matrix} \begin{matrix}3\\5\\\begin{matrix}5\\2\\0\end{matrix}\end{matrix}\right|$