**Лекция 4. Определители квадратных матриц и их свойства. Вычисление определителей**

**1. Определители**

*Определение*. Определителем (или детерминантом) квадратной матрицы *n*-го порядка называется число △*n*, записываемое в виде квадратной таблицы

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам *aij* (*i, j* = 1, …, *n*), которые называются *элементами* определителя (всего их *n*2). Индекс *i* указывает номер строки, а *j* — номер столбца квадратной таблицы, на пересечении которых находится элемент *aij*.

**Примеры определителей 1**

Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом*.

*Главной диагональю определителя* называется совокупность элементов *a*11, *a*22, *a*33, …, *ann*.

**Обозначения определителей**

Для квадратной матрицы A *n*-го порядк обозначения ее определителя могут иметь вид:

|A|, det(A), или просто ∆

**2. Минор элемента определителя**

*Определение*. **Минором** *Mi*j элемента *aij* называется определитель (n – 1)-го порядка △*n-*1, полученный из определителя n-го порядка △*n* вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

**Примеры миноров элементов определителей 2**

**3. Алгебраическое дополнение элемента определителя**

*Определение*. **Алгебраическое дополнение** *Aij* элемента *aij* определяется равенством

***Aij*  = (– 1)*i+j* · *Mi*j или *Aij*  = (– 1)*i+jMi*j**

**Пример 3**

**4. Вычисление определителей**

Значение определителя △*n* находится по следующему правилу.

*Для n = 2 (определитель второго порядка)*

Пример 4

*Для n = 3 (определитель третьего порядка)*

где

*A*11 = (– 1)1+1· *M*11

*A*12 = (– 1)1+2· *M*12

*A*13 = (– 1)1+3· *M*13

**Пример 5**

**Задание 1**

Вычислить определители

**Другие способы вычисления определителей**

*Правило треугольников для вычисления определителя* △3

+)

Схематическая запись этого правила

**+ –**

**Задание 2**

Вычислить определитель, используя правило треугольника

*Правило диагонали для вычисления определителя* △3 *(сводится к правилу треугольников)*

Этим правилом легко воспользоваться при вычислении определителей более высоких порядков, например △5

**Задание 3**

Вычислить определитель

**5. Основные свойства определителей**

Свойство 1. Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю.

**Пример 6**

Для элементов первого ряда

Для элементов второго ряда

Для элементов третьего ряда

57 = 57 = 57=57

Свойство 2. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот.

**Пример 7**

Имеем определитель

Заменим в определителе строки соответствующими столбцами и вычислим определитель

57 = 57

Свойство 3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный.

**Пример 8**

В определителе поменяем местами, например, верхний и нижний ряды местами и вычислим определитель

Свойство 4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

**Пример 9**

Вычислим определитель с одинаковыми параллельными рядами

Свойство 5. Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель умножится на это же число λ.

**Пример 10**

Имеем определитель, в котором в одном из рядов, элементы имеют общий множитель. Вычислим этот определитель

Вынесем множитель за знак определителя и снова выполним вычисления

95 = 95

Свойство 6. Если элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

**Пример 11**

Свойство 7. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю.

Свойство 8. Сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.

**Пример 12**

Найдем сумму произведений элементов верхнего ряда и алгебраических дополнений соответствующих элементов параллельного нижнего ряда.

Свойство 9. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых.

**Пример 13**

Представим элементы среднего ряда в виде суммы двух слагаемых следующим образом

По свойству должно выполняться равенство

Проверим это

, т.е. 57 = 20 + 37

Свойство 10. Определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ.

**Задание 4**

Проверьте это свойство самостоятельно.

**Задание 5**

1. Вычислить определитель одним из описанных в лекции способом:

а)

б)

2. Вычислить определители:

а)

б)

в)

г)