**Лекция 3. Операции над матрицами**

**1. Транспонирование матриц**

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами.

***Пример 1.***

Пусть

$$A=\left(\begin{matrix}2&3&4\\6&7&8\\1&2&3\end{matrix} \begin{matrix}5\\9\\4\end{matrix}\right), B=\left(\begin{matrix}2&3&\begin{matrix}1&2\end{matrix}\end{matrix}\right), C=\left(\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right), D=\left(\begin{matrix}-1&4\\4&-1\end{matrix}\right)$$

Транспонированными к ним будут матрицы

$$A^{T}=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\\5\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}6\\7\\8\end{matrix}\\9\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\\4\end{array}\right), B^{T}=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}2\\3\\1\end{matrix}\\2\end{array}\right), C^{T}=\left(\begin{matrix}1&4\end{matrix}\right), D^{T}= \left(\begin{matrix}-1&4\\4&-1\end{matrix}\right)$$

*Замечание*. Дважды транспонированная матрица совпадает с первоначальной. (*A*T)T = *A*

*Определение.* Если *AT = A,* то матрица *A* называется **симметричной***.*

**2. Сложение матриц**

Операция сложения определена для матриц одного размера.

Пусть

$A=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}\\a\_{21}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{m1}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{12}\\a\_{22}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{m2}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}∙∙∙\\∙∙∙\\∙∙∙\end{matrix}\\∙∙∙\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{1n}\\a\_{2n}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{mn}\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}b\_{11}\\b\_{21}\\∙∙∙\end{matrix}\\b\_{m1}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}b\_{12}\\b\_{22}\\∙∙∙\end{matrix}\\b\_{m2}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}∙∙∙\\∙∙∙\\∙∙∙\end{matrix}\\∙∙∙\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}b\_{1n}\\b\_{2n}\\∙∙∙\end{matrix}\\b\_{mn}\end{array}\right)$

Суммой матриц *A* и *B* называется матрица

$$A+B=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{11}+b\_{11}\\a\_{21}+b\_{21}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{m1}+b\_{m1}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{12}+b\_{12}\\a\_{22}+b\_{22}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{m2}+b\_{m2}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}∙∙∙\\∙∙∙\\∙∙∙\end{matrix}\\∙∙∙\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}a\_{1n}+b\_{1n}\\a\_{2n}+b\_{2n}\\∙∙∙\end{matrix}\\a\_{mn}+b\_{mn}\end{array}\right)$$

***Пример 2.***

Сложим две матрицы

$$A=\left(\begin{matrix}0&-1&-5\\4&2&3\end{matrix}\right) и B=\left(\begin{matrix}6&3&0\\1&4&-2\end{matrix}\right)$$

$$C=A+B=\left(\begin{matrix}0+6&-1+3&-5+0\\4+1&2+4&3-2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}6&2&-5\\5&6&1\end{matrix}\right)$$

*Определение.*

Матрица *B* называется **противоположной** матрице *A* и обозначается – *A*, если *A* + *B* = *О*

**3. Умножение матрицы на число**

$$λA=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}λa\_{11}\\λa\_{21}\\∙∙∙\end{matrix}\\λa\_{m1}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}λa\_{12}\\λa\_{22}\\∙∙∙\end{matrix}\\λa\_{m2}\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}∙∙∙\\∙∙∙\\∙∙∙\end{matrix}\\∙∙∙\end{array} \begin{array}{c}\begin{matrix}λa\_{1n}\\λa\_{2n}\\∙∙∙\end{matrix}\\λa\_{mn}\end{array}\right)$$

***Пример 3.***

Умножим матрицу $A=\left(\begin{matrix}1&0\\6&-6\\12&3\end{matrix}\right)$ на действительное число $λ=\frac{2}{3}$

$$B=λA=\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}∙1&\frac{2}{3}∙0\\\frac{2}{3}∙6&\frac{2}{3}∙(-6)\\\frac{2}{3}∙12&\frac{2}{3}∙3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{2}{3}&0\\4&-4\\8&2\end{matrix}\right)$$

**4. Умножение матриц**

Матрицу *A* можно умножить на матрицу *B* только в том случае, если число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*.

Пусть

$$A=\left(\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\\a\_{31}&a\_{32}\end{matrix}\right) и B=\left(\begin{matrix}b\_{11}&b\_{12}&b\_{13}\\b\_{21}&b\_{22}&b\_{23}\end{matrix}\right)$$

*Произведением матриц A и B будет матрица C, элементы которой находятся следующим образом*

$$C=A∙B=AB=\left(\begin{matrix}a\_{11}∙b\_{11}+a\_{12}∙b\_{21}&a\_{11}∙b\_{12}+a\_{12}∙b\_{22}&a\_{11}∙b\_{13}+a\_{12}∙b\_{23}\\a\_{21}∙b\_{11}+a\_{22}∙b\_{21}&a\_{21}∙b\_{12}+a\_{22}∙b\_{22}&a\_{21}∙b\_{13}+a\_{22}∙b\_{23}\\a\_{31}∙b\_{11}+a\_{32}∙b\_{21}&a\_{31}∙b\_{12}+a\_{32}∙b\_{22}&a\_{31}∙b\_{13}+a\_{32}∙b\_{23}\end{matrix}\right)$$

***Пример 4.***

Перемножим две матрицы. Пусть

$A=\left(\begin{matrix}1&-2&3\\4&1&7\end{matrix}\right) и B=\left(\begin{matrix}-9&1&0\\4&1&1\\-2&2&-1\end{matrix}\right)$

Решение.

Т.к. число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то можно говорить о произведении матрицы A на матрицу B:

$AB=\left(\begin{matrix}1∙\left(-9\right)+\left(-2\right)∙4+3∙\left(-2\right)&1∙1+\left(-2\right)∙1+3∙2&1∙0+\left(-2\right)∙1+3∙(-1)\\4∙\left(-9\right)+1∙4+7∙(-2)&4∙1+1∙1+7∙2&4∙0+1∙1+7∙(-1)\end{matrix}\right)$=

$$=\left(\begin{matrix}-23&5&-5\\-46&19&-6\end{matrix}\right)$$

*Определение.*

Матрицы, для которых *BA* = *AB*, называются **перестановочными**.

***Пример 5.***

Пусть

$$A=\left(\begin{matrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{matrix}\right) и B=\left(\begin{matrix}2&4&-1\\0&2&4\\0&0&2\end{matrix}\right)$$

$$AB=\left(\begin{matrix}3∙2+1∙0+0∙0&3∙4+1∙2+0∙0&3∙\left(-1\right)+1∙4+0∙2\\0∙2+3∙0+1∙0&0∙4+3∙2+1∙0&0∙\left(-1\right)+3∙4+1∙2\\0∙2+0∙0+3∙0&0∙4+0∙2+3∙0&0∙\left(-1\right)+0∙4+3∙2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}6&14&1\\0&6&14\\0&0&6\end{matrix}\right)$$

$BA=\left(\begin{matrix}6&14&1\\0&6&14\\0&0&6\end{matrix}\right)$ (**Задание 1**: проверить!) Следовательно, *AB* = *BA,* матрицы *A* и  *B —* ***перестановочные****.*

**Задание 2.**Даны матрицы

$$A=\left(\begin{matrix}1&1&3\\2&3&1\\0&-1&3\end{matrix}\right) и B=\left(\begin{matrix}4&4&-1\\1&-2&1\\0&2&2\end{matrix}\right)$$

Найти: 1) $A^{T}$; 2) A + B; 3) 5B; 4) B – A; 5) AB; 6) 2A – 3B