**Лекция 7. Аналитическая геометрия на плоскости**

**1. Понятие о предмете аналитическая геометрия**

В школьной (*элементарной*) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

*Аналитическая геометрия* возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем, чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием *координатного метода*. В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности Аполлония[[1]](#footnote-1) (3 – 2 в. до н. э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине 17 века в работах Ферма[[2]](#footnote-2) и Декарта[[3]](#footnote-3). Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые Л. Эйлером.

**2. Координаты**

Координатами точки называются такие величины, которые определяют положение точки (в пространстве, на плоской или на кривой поверхности, на прямой или на кривой линии). Так, если, например, точка ***M*** должна лежать где-нибудь на прямой линии ***X1X*** (рис. 1), то ее положение можно определить одним числом, например, следующим образом: выбрав на прямой какую-нибудь начальную точку ***O***, измерим отрезок ***OM***, скажем в сантиметрах. Мы получим число ***x***, положительное или отрицательное, смотря по тому, куда направлен отрезок ***OM*** (вправо или влево, если прямая горизонтальна). Число ***x*** есть координата точки ***M***.

Значение координаты ***x*** зависит от выбора начальной точки ***O***, от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

X

X1

O

M

Рис. 1. Точка ***M*** на прямой

**3. Прямоугольная система координат**

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Простейший способ таков.

Проводятся две взаимно перпендикулярные прямые (рис. 2). Они называются *осями координат*. Одна из них ***X*1*X*** (обычно ее проводят горизонтально) называется *осью абсцисс*, другая ***Y*1*Y*** — *осью ординат*. Точка их пересечения называется *началом координат*, или, короче, *началом*. Для измерения отрезков на осях координат выбирается некоторая единица масштаба, произвольная, но одна и та же для обеих осей.

На каждой оси выбирается положительное направление (обозначаемое стрелкой). На рис. 2 луч ***OX*** дает положительное направление на оси абсцисс, а луч ***OY*** — на оси ординат.

X

X1

O

Y

Y1

Рис. 2. Прямоугольная система координат

Принято выбирать положительное направление так, чтобы (рис. 3) положительный луч ***OX*** после поворота на 90° против часовой стрелки совмещался с положительным лучом ***OY***.

X

X1

O

Y

Y1

Рис. 3. Выбор положительного направления осей

Оси координат ***X*1*X,* Y1Y**(с установленными положительными направлениями и выбранным масштабом) образуют *прямоугольную систему координат*.

**4. Прямоугольные координаты**

Положение точки ***M*** на плоскости в прямоугольной системе координат определяется следующим образом. Проводим ***MP***|| ***Y*1*Y*** до пересечения с осью ***X*1*X*** в точке ***P*** (рис. 4) и ***MQ***|| ***X*1*X*** до пересечения с осью ***Y*1*Y*** в точке ***Q***. Числа ***x*** и ***y***, измеряющие отрезки ***OP*** и ***OQ*** в избранном масштабе (а иногда и сами эти отрезки) называются *прямоугольными координатами* (короче *координатами*) точки ***M***. Эти числа берем положительными или отрицательными в зависимости от направления отрезков ***OP, OQ***. Число ***x*** называется *абсциссой* точки ***M***, число ***y*** — ее *ординатой*.

X

X1

O

Y

Y1

M

P

Q

Рис. 4. Координаты точки ***M***

На рис. 4 точка ***M*** имеет абсциссу *x* = 2 и ординату *y* = 3 (при выбранной единице масштаба). Это записывается так: ***M*** (2; 3). Вообще запись ***M*** (*a*; *b*) означает, что точка ***M*** имеет абсциссу

*x* = *a*

и ординату

*y* = *b*.

**5. Прямая линия; уравнение, разрешенное относительно ординаты («с угловым коэффициентом»)**

Всякую прямую, не параллельную оси ординат, можно представить уравнением вида:

*y* = *ax* + *b;*

здесь *a* есть тангенс угла *α* (рис. 5), образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс (*a* = tg *α* = tg < *XLS*), а число *b* по абсолютному значению равно длине отрезка *OK*, отсекаемого прямой на оси ординат; число *b* положительно или отрицательно в зависимости от направления отрезка *OK*. Если прямая проходит через начало, то *b* = 0.

Величину *a* называют *угловым коэффициентом*, величину *b* — *начальной ординатой*.

X

S1

O

Y

Y1

S

α

L

K

Рис. 5. Прямая в прямоугольной системе координат

**6. Взаимное расположение линии и точки**

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка *M* на некоторой линии *L*, достаточно знать координаты точки *M* и уравнение линии *L*. Если координаты точки *M* удовлетворяют уравнению линии *L*, то *M* лежит на *L*; в противном случае не лежит.

***Пример 1.*** Лежит ли точка *M* (5; 5) на окружности *x*2 + *y*2 = 49?

*Решение*. Подставим значения *x* = 5, *y* = 5 в уравнение линии *x*2 + *y*2 = 49, получим неверное равенство 25 + 25 = 49, что означает – уравнение решений не имеет. Значит, точка *M* не лежит на рассматриваемой окружности.

**7. Взаимное расположение двух линий**

Чтобы ответить на вопрос, есть ли у двух линий общие точки и если да, то сколько, достаточно знать уравнения этих линий. Если уравнения совместны (т.е. система, составленная из этих уравнений, имеет решение), то общие точки есть, в противном случае их нет. Число общих точек равно числу решений системы уравнений.

***Пример 2.*** Имеют ли пряма *x* + *y* = 3 и окружность *x*2 + *y*2 = 49 общие точки?

*Решение*. Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными (проверить решение самостоятельно)

$$\left\{\begin{array}{c}x+y=3\\x^{2}+y^{2}=49\end{array}\right.$$

Прямая линия *x* + *y* = 3 и окружность имеют две общие точки, так как система имеет два решения:

$$x\_{1}=\frac{3+\sqrt{89}}{2}≈6,22, y\_{1}=\frac{3-\sqrt{89}}{2}≈-3,22$$

$$x\_{2}=\frac{3-\sqrt{89}}{2}≈-3,22, y\_{2}=\frac{3-\sqrt{89}}{2}≈6,22$$

**8. Расстояние между двумя точками**

Расстояние *d* между двумя точками *A*1 (*x*1; *y*1) и *A*2 (*x*2; *y*2) выражается формулой

$d=\sqrt{\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}+\left(y\_{2}-y\_{1}\right)^{2}}$.

***Пример 3***. Расстояние между точками *M* (– 2,3; 4) и *N* (8,5; 0,7) составляет

$d=\sqrt{\left(8,5+2,3\right)^{2}+\left(0,7+4\right)^{2}}=\sqrt{10^{2}+3,3^{2}}≈11,3$ (масштабных единиц).

*Замечание 1*. Порядок точек *M* и *N* не играет роли, можно *N* считать первой, а *M* – второй.

*Замечание 2*. Расстояние *d* считается положительным; поэтому в формуле корень берется арифметический.

**9. Деление отрезка в данном отношении**

Даны точки *A*1 (*x*1; *y*1) и *A*2 (*x*2; *y*2) (рис. 6). Требуется найти координаты (*x*, *y*) точки *K*, делящей отрезок *A*1 *A*2 в отношении *A*1*K* : *KA*2 = *m*1 : *m*2.

X

K

O

Y

A1

A2

P1

P2

P

*x*

*y*

Рис. 6. Деление отрезка в данном отношении

Решение дается формулами:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{x=\frac{m\_{2}x\_{1}+m\_{1}x\_{2}}{m\_{1}+m\_{2}}}{y=\frac{m\_{2}y\_{1}+m\_{1}y\_{2}}{m\_{1}+m\_{2}}}$$

Если отношение *m*1 : *m*2 обозначить буквой λ, то формулы примут вид:

$$x=\frac{x\_{1}+λx\_{2}}{1+λ}, y=\frac{y\_{1}+λy\_{2}}{1+λ}$$

***Пример 4.*** Даны точки *B* (6; – 4) и точка *O*, совпадающая с началом координат. Найти точку *K*, делящую *BO* в отношении 2 : 3.

*Решение*. Учитывая, что координаты точки *O* (0; 0), подставим в формулы деления отрезка в данном отношении *m*1 = 2, *m*2 = 3, *x*1 = 6, *y*1 = – 4, *x*2 = 0, *y*2 = 0.

Получим:

$$x=\frac{18}{5}=3,6 y=-\frac{12}{5}=-2,4$$

Это координаты искомой точки *K* (3,6; – 2,4).

*Замечание 1*. Выражение «точка *K* делит отрезок *A*1*A*2 в отношении *m*1 : *m*2» означает, что отношение *m*1 : *m*2 равно отношению отрезков *A*1*K* : *KA*2, взятых *именно в этом* (а не обратном) порядке. В **примере 4** точка *K* (3,6; – 2,4) делит отрезок *BO* в отношении 2 : 3, о отрезок *OB* — в отношении 3 : 2.

*Замечание 2*. Пусть точка *K* делит отрезок *A*1*A*2 в отношении внешним образом, т. е. лежит на продолжении отрезка *A*1*A*2; тогда формулы деления отрезка в данном отношении сохраняют силу, если величине *m*1 : *m*2 = λ приписать отрицательный знак.

***Пример 5***. Даны точки *A*1 (1; 2) и *A*2 (3; 3). Найти на продолжении отрезка *A*1*A*2 точку, отстоящую от *A*1 вдвое дальше, чем от *A*2.

*Решение.* Имеем *m*1 : *m*2 = λ = – 2 (так что можно положить *m*1 = – 2, *m*2 = 1 или *m*1 = 2, *m*2 = – 1). По формулам находим:

$$x=\frac{1·1+\left(-2\right)∙3}{-2+1}=5, y=\frac{1·2+\left(-2\right)∙3}{-2+1}=4$$

**10. Деление отрезка пополам**

Если концы отрезка заданы координатами (*x*1; *y*1) и (*x*2; *y*2), то координаты середины этого отрезка равны полусуммам соответственных координат его концов:

$$x=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}, y=\frac{y\_{1}+y\_{2}}{2}$$

**11. Площадь треугольника**

Пусть точки *A*1 (*x*1; *y*1), *A*2 (*x*2; *y*2), *A*3 (*x*3; *y*3) — вершины треугольника, тогда его площадь выражается формулой

$$S=\pm \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}x\_{1}-x\_{3}&y\_{1}-y\_{3}\\x\_{2}-x\_{3}&y\_{2}-y\_{3}\end{matrix}\right|$$

Площадь треугольника мы считаем положительной, поэтому перед определителем берем знак плюс, если значение определителя положительно, и минус, если оно отрицательно.

***Пример 6***. Найти площадь треугольника с вершинами *A*1 (1; 3), *A*2 (2; –5), *A*3 (–8; 4).

*Решение*. Принимая *A* за первую вершину, *B* за вторую, *C* за третью, находим сначала определитель:

$$\left|\begin{matrix}x\_{1}-x\_{3}&y\_{1}-y\_{3}\\x\_{2}-x\_{3}&y\_{2}-y\_{3}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1+8&3-4\\2+8&-5-4\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}9&-1\\10&-9\end{matrix}\right|=-81+10=-71$$

$S=-\frac{1}{2}\left(-71\right)=35,5$ (Внимание! Был взят знак минус).

**12. Прямая, параллельная оси**

Прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 7) представляется уравнением

*y* = *b*,

b

X

O

Y

Рис. 7. Прямая, параллельная оси абсцисс

где величина *b* по абсолютному значению равна расстоянию от оси абсцисс до прямой. Если *b* > 0, то прямая лежит «над» осью абсцисс; если *b* < 0, — то «под» ней. Само ось абсцисс представляется уравнением

*y* = 0.

Прямая параллельная оси ординат (рис. 8) представляется уравнением

*x* = *f*.

f

X

O

y

Рис. 8. Прямая, параллельная оси ординат

Абсолютное значение *f* дает расстояние от оси ординат до прямой. Если *f* > 0, то прямая лежит «справа» от оси ординат; если *f* < 0, — «слева» от нее. Сама ось ординат представляется уравнением

*x =* 0*.*

***Пример 7***. Написать уравнение прямой, отсекающей начальную ординату *b* = 3 и параллельной оси *OX*.

*Решение*. Сделаем чертеж.

3

X

O

y

*y* = 3

Рис. 9. Чертеж к задаче

В общем случае, прямая параллельная оси *OX* задается уравнением *y = b.* В нашем случае *b* = 3.

Ответ: *y* = 3.

***Пример 8***. Какую линию представляет собой уравнение 3*x* + 5 = 0?

*Решение*. Разрешая данное уравнение относительно x, получаем $x=-\frac{5}{3}.$

Уравнение представляет прямую, параллельную оси *OY* и лежащую «слева» от нее на расстоянии $\frac{5}{3}$ (рис. 10).

$$x=-\frac{5}{3}.$$

X

O

y

Рис. 10. Чертеж к задаче

**13. Общее уравнение прямой**

Уравнение

*Ax* + *By* + *C* = 0

(где *A*, *B*, *C* могут иметь любые значения, лишь бы коэффициенты *A*, *B* не были нулями оба сразу) представляет прямую линию. Всякую прямую линию можно представить уравнением этого вида. Поэтому его называют *общим уравнением прямой*.

Если *A* = 0, т. е. уравнение имеет вид *By* + *C* = 0, то оно представляет прямую параллельную оси *OX*.

Если *B* = 0, т. е. уравнение имеет вид *Ax* + *C* = 0, то оно представляет прямую параллельную оси *OY*.

Когда B ≠ 0, то уравнение *Ax* + *By* + *C* = 0 можно разрешить относительно ординаты y; тогда оно преобразуется к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y=ax+b \left(где a=-\frac{A}{B}, b=-\frac{C}{B}\right).$$

Так, уравнение вида 2*x* – 4*y* + 5 = 0 (*A* =2, *B* = – 4, *C* = 5) преобразуется к виду *y* = 0,5*x* + 1,25.

**14. Построение прямой по ее уравнению**

Для построения прямой достаточно отметить две ее точки.

***Пример 9***. Построить прямую, заданную уравнением 4*x* + 2*y* =8.

Пусть *y* = 0, тогда *x* = 2. Пусть *x* = 0, тогда *y* = 4. Получили две точки (2; 0) и (0; 4). Проведем через них прямую (рис. 11).

X

O

y

Рис. 11. Прямая 4*x* + 2*y* =8

**15. Условие параллельности прямых**

Условием параллельности двух прямых, заданных уравнениями

$y=a\_{1}x+b\_{1}$,

$y=a\_{2}x+b\_{2}$,

служит равенство угловых коэффициентов

*a*1 = *a*2,

т. е. прямые параллельны, если угловые коэффициенты в уравнения этих прямых равны, и не параллельны, если угловые коэффициенты не равны.

***Пример 10.*** Так, прямые *y* = 3*x* – 5 и *y* = 3*x* + 4 параллельны, так как у них угловые коэффициенты равны (*a*1 = *a*2 = 3), а прямые *y* = 3*x* – 5 и *y* = 6*x* – 8 не параллельны, так как у них угловые коэффициенты не равны (*a*1 = 3, *a*2 = 6).

***Замечание 1***. Если уравнение одной из двух прямых не содержит ординаты (т. е. прямая параллельна оси *OY*), то эта прямая параллельна другой прямой при условии, что уравнение последней также не содержит *y*.

***Замечание 2***. Если две прямые представлены уравнениями

*A*1*x* + *B*1*y* + *C* = 0,

*A*2*x* + *B*2*y* + *C* = 0,

то условие параллельности будет выражаться следующим равенством

*A*1*B*2 = *A*2*B*1 = 0

или в другом обозначении

$$\left|\begin{matrix}A\_{1}&B\_{1}\\A\_{2}&B\_{2}\end{matrix}\right|=0$$

***Пример 11.*** Являются ли прямые 2*x* – 7*y* +12 = 0 и *x* – 3,5*y* + 10 = 0 параллельными?

*Решение*. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов

$$\left|\begin{matrix}2&-7\\1&-3,5\end{matrix}\right|=2∙\left(-3,5\right)-1∙\left(-7\right)=-7+7=0$$

Ответ: прямые параллельны.

**16. Условие перпендикулярности двух прямых**

Условием перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями

$y=a\_{1}x+b\_{1}$,

$y=a\_{2}x+b\_{2}$,

Служит соотношение

*a*1*a*2 = – 1,

т. е. две прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно – 1, и не перпендикулярны, если оно не равно – 1.

***Пример 12.*** Прямые *y* = 2*x* и y = – 0,5*x* перпендикулярны, так как *a*1*a*2 = 2·(– 0,5) = – 1, а прямые *y* = 3*x* и *y* = – 2*x* не перпендикулярны, так как у них *a*1*a*2 = 3· (– 2) = – 6.

***Замечание 1***. Если уравнение одной из двух прямых не содержит ординаты (т. е. прямая параллельна оси *OY*), то эта прямая перпендикулярна к другой прямой при условии, что уравнение последней не содержит абсциссы. В противном случае прямые не перпендикулярны.

***Замечание 2***. Если две прямые представлены уравнениями

*A*1*x* + *B*1*y* + *C*1 = 0,

*A*2*x* + *B*2*y* + *C*2 = 0,

то условие перпендикулярности будет выражаться следующим равенством

*A*1*A*2 + *B*1*B*2 = 0.

***Пример 13***

Прямые 2*x* + 5*y* = 8 и 5*x* – 2*y* = 3 перпендикулярны, так как *A*1*A*2 + *B*1*B*2  = 2·5 + 5· (– 2) = 0.

Прямые 3*x* – 4*y* = 2 и 2*x* + 3*y* = 6 не перпендикулярны, так как *A*1*A*2 + *B*1*B*2  = 3· 2 + (– 4)·3 = – 6.

**17. Угол между прямыми**

Пусть две неперпендикулярные прямые *L*1 и *L*2 (взятые в данном порядке) представляются уравнениями

$y=a\_{1}x+b\_{1}$,

$y=a\_{2}x+b\_{2}$.

Тогда формула

$$tg φ=\frac{a\_{2}-a\_{1}}{1+a\_{1}a\_{2}}$$

дает угол, на который надо повернуть первую прямую, чтобы она стала параллельной второй.

***Пример 14.*** Найти угол между прямыми *y* = 2*x* – 3 и *y* = – 3*x* + 2.

*Решение*. Здесь *a*1 = 2, *a*2 = – 3. По формуле находим угол

 $tg φ=\frac{a\_{2}-a\_{1}}{1+a\_{1}a\_{2}}=\frac{-3-2}{1+2∙(-3)}=\frac{-5}{-5}=1$, значит угол φ = 45°.

**Задание 1.** Постройте указанные прямые и проверьте, действительно ли угол между прямыми равен 45°.

**Задание 2.** Найдите угол между теми же прямыми, что в *примере 14*, но теперь первой пусть будет прямая *y* = – 3*x* + 2, а второй — *y* = 2*x* – 3.

***Замечание 1.*** Если прямые, между которыми находится угол перпендикулярны, то формула

$tg φ=\frac{a\_{2}-a\_{1}}{1+a\_{1}a\_{2}}$ теряет смысл, так как знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае, каждый раз, как только знаменатель становится равным нулю, следует сделать вывод о том, что прямые перпендикулярны и угол между ними равен 90°.

**18. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой**

Три очки *A*1(*x*1; *y*1), *A*2(*x*2; *y*2), *A*3(*x*3; *y*3) лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда

$$\left|\begin{matrix}x\_{2}-x\_{1}&y\_{2}-y\_{1}\\x\_{3}-x\_{1}&y\_{3}-y\_{1}\end{matrix}\right|=0.$$

Эта формула, как мы уже знаем, выражает также, что площадь треугольника *A*1*A*2*A*3 равна нулю.

***Пример 15.*** Выяснить, лежат ли точки *A*1(–2; 5), *A*2(4; 3), *A*3(16; –1).

*Решение*.
$$\left|\begin{matrix}x\_{2}-x\_{1}&y\_{2}-y\_{1}\\x\_{3}-x\_{1}&y\_{3}-y\_{1}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}4-(-2)&3-5\\16-(-2)&-1-5\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}6&-2\\18&-6\end{matrix}\right|=-36+36=0.$$

Ответ: точки лежат на одной прямой.

**19. Уравнение прямой, проходящей через две точки**

Прямая, проходящая через две точки *A*1 (*x*1; *y*1) и *A*2 (*x*2; *y*2), представляется уравнением

$$\left|\begin{matrix}x\_{2}-x\_{1}&y\_{2}-y\_{1}\\x-x\_{1}&y-y\_{1}\end{matrix}\right|=0.$$

***Пример 16.*** Составить уравнение прямой, проходящей через точки (1; 5) и (3; 9).

*Решение*. Используем формулу

$$\left|\begin{matrix}x\_{2}-x\_{1}&y\_{2}-y\_{1}\\x-x\_{1}&y-y\_{1}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}3-1&9-5\\x-1&y-5\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2&4\\x-1&y-5\end{matrix}\right|=2\left(y-5\right)-4\left(x-1\right)=$$

$$=2y-10-4x+4=-4x+2y-6=0.$$

**20. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой**

Прямая, проходящая через точку *M*1(*x*1; *y*1) и параллельная прямой *y* = *ax* + *b*, представляется уравнением

*y* – *y*1 = *a* (*x* – *x*1).

***Пример 17.*** Составить уравнение прямой, проходящей через точку (– 2; 5) и параллельной прямой 5*x* – 7*y* – 4 = 0.

*Решение*. Преобразуем уравнение прямой к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом.

5*x* – 7*y* – 4 = 0

– 7y = –5x + 4

$$y=\frac{5}{7}x-\frac{4}{7}$$

Таким образом, имеем: *x*1 = –2 , *y*1 = 5 , $a=\frac{5}{7}$

Подставляя в уравнение *y* – *y*1 = *a*(*x* – *x*1), получим $y-5=\frac{5}{7}\left(x+2\right) или 5x-7y+45=0$

**21. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой**

1. Прямая проходящей через точку *M*1(*x*1; *y*1) и перпендикулярная к прямой *y* = *ax* + *b*, представляется уравнением

$$y-y\_{1}=-\frac{1}{a}(x-x\_{1})$$

***Пример 18.*** Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; – 1) и перпендикулярную прямой 4*x* – 9*y* = 3.

*Решение*. Данную прямую можно представить уравнением $y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{3} \left(a=\frac{4}{9}\right).$

Уравнение искомой прямой есть $y+1=-\frac{9}{4}\left(x-2\right), т.е.9x+4y-14=0$.

2. Прямая проходящей через точку *M*1(*x*1; *y*1) и перпендикулярная к прямой *Ax + By +C =* 0, представляется уравнением

*A*(*y* – *y*1) – *B*(*x* – *x*1) = 0.

***Пример 19.*** Составить уравнение прямой, проходящей через точку (– 3; – 2) перпендикулярно к прямой 2*y* + 1 = 0.

*Решение*. Здесь *A* = 0, *B* = 2. Подставляем 0(*y* +2) – 2(*x* +3) = 0 или *x* + 3 = 0.

*Замечание* *к решению*. Формула $y-y\_{1}=-\frac{1}{a}(x-x\_{1})$ в данном решении была бы неприменима, так как *a* =0.

**22. Расстояние от точки до прямой**

Расстояние *d* от точки *M*1 (*x*1; *y*1) до прямой *Ax + By +C =* 0 равно абсолютному значению величины

$$d= \left|\frac{Ax\_{1}+By\_{1}+C}{\sqrt{A^{2}+B^{2}}}\right|.$$

***Пример 20.*** Найти расстояние от точки (– 1; 1) до прямой 3*x* – 4*y* +5 = 0.

*Решение*. $d= \left|\frac{Ax\_{1}+By\_{1}+C}{\sqrt{A^{2}+B^{2}}}\right|=\left|\frac{3\left(-1\right)-4∙1+5}{\sqrt{3^{2}+(-4)^{2}}}\right|=\left|\frac{-2}{5}\right|=\frac{2}{5}$

**23. Алгебраические линии**

**ОКРУЖНОСТЬ**

Окружность есть *линия второго порядка*, так как представляется уравнением второй степени.

Окружность радиуса *R* с центром в точке *C*(*a*; *b*) (рис. 12) представляется уравнением

(*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 = *R*2.

X

O

y

*M*(*x*; *y*)

C

b

a

Рис. 12. Окружность с центром в точке *C*(*a*; *b*)

Если центр окружности находится в начале координат, т. е. в точке (0; 0), то окружность представляется уравнением

*x*2 + *y*2 = *R*2.

Если в уравнении (*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 = *R*2 раскрыть скобки, то его можно переписать в виде

 *x*2 + *y*2 –2*ax* – 2*by* +*a*2 +*b*2 – *R*2 = 0.

***Пример 21.*** Окружность радиуса *R* = 7 с центром *C*(4; – 6) представляется уравнением

(*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 = *R*2

(*x* – 4)2 + (*y* + 6)2 = 72 или *x*2 + *y*2 – 8*x* +12*y* + 3 = 0 или (после умножения на 3)

3*x*2 + 3*y*2 – 24*x* +36*y* + 9 = 0.

**ЭЛЛИПС**

Эллипс также есть *линия второго порядка*, так как представляется уравнением второй степени.

Линия, в которую преобразуется линия окружности после равномерного сжатия, называется эллипсом (рис. 13).

B1

X

O

y

b

a

A

A1

B

Рис. 13. Эллипс

Отрезок *AA*1 = 2*a* называется *большой осью* эллипса, соответствен *a* — *большая полуось*.

Отрезок *BB*1 = 2*b* называется *малой осью* эллипса, соответствен *b* — *малая полуось*.

Точка *O* называется *центром* эллипса.

Точки *A, A*1, *B*, *B*1 называются *вершинами* эллипса.

Прямая *AA*1 называется *осью сжатия*.

Отношение $k=\frac{b}{a}$ называется коэффициентом сжатия эллипса.

Окружность можно рассматривать как эллипс с коэффициентом сжатия *k* = 1.

**Каноническое[[4]](#footnote-4) уравнение эллипса**

Если оси эллипса принять за оси координат, то эллипс представляется уравнением

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

***Пример 22.*** Окружность радиуса R = 10 см подвергнута равномерному сжатию с коэффициентом сжатия 3 : 5. После преобразования получился эллипс с большой осью 2*a* = 20 см и малой осью 2*b* = 12 см $\left(\frac{3}{5}=\frac{b}{a}, \frac{3}{5}=\frac{b}{10}, b=\frac{30}{5}=6, 2b=12\right)$.

Каноническое уравнение этого эллипса есть

$$\frac{x^{2}}{100}+\frac{y^{2}}{36}=1$$

**Другое определение эллипса**

*Эллипс* есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек *F* и *F*1 имеет одно и то же значение 2*a* (рис. 14).

X

O

y

c

F

*M*(*x*; *y*)

F1

Рис. 14. Фокусы эллипса

Точки *F* и *F*1 называются *фокусами* эллипса, а расстояние *FF*1 — *фокусным расстоянием*; оно обозначается 2*c*.

Полуфокусное расстояние, большая и малая полуоси эллипса связаны формулой

*b*2 = *a*2 – *c*2.

**Построение эллипса**

Проводим две концентрические окружности радиуса *OA* = *a* и *OB* = *b* (рис. 15). Через центр *O* проводим произвольный луч *ON* (выделен красным).

y

O

B

B1

A

N

M1

M

K

D

P

A1

x

Рис. 15. Построение эллипса

Через точки *K* и *M*1, в которых *ON* встречает две окружности, проводим прямые, соответственно параллельные осям *OX*, *OY*. Эти прямые пересекутся в точке *M*, принадлежащей эллипсу. Аналогично, проводя другие лучи (выделены синим и зеленым цветами), получим другие точки эллипса.

**ГИПЕРБОЛА**

*Гипербола* (рис 16) есть геометрическое место точек (*M*), разность расстояний которых до двух данных точек *F* и *F*1 имеет одно и то же абсолютное значение

|*F*1*M* – *FM*| = 2*a*.

F

F1

M(x; y)

x

y

c

O

a

A

A1

Рис. 16. Гипербола

Точки *F* и *F*1 называются *фокусами* гиперболы, а расстояние *FF*1 — *фокусным расстоянием*; оно обозначается 2*c*.

Точка *O* называется *центром* гиперболы.

Точки *A* (*a;* 0) и *A*1 (– *a*; 0) называются *вершинами* гиперболы.

Прямая *AA*1 называется *действительной* *осью* гиперболы (*a* — действительная полуось).

Если на оси *OY* отложить от начала координат отрезки *OB* = *b* и *OB*1 = *b*, то прямая *BB*1 будет называться *мнимой осью* гиперболы (*b* — мнимая полуось).

Действительная и мнимая полуоси гиперболы и половина ее фокусного расстояния *a*, *b*, *c* связаны между собой формулой

*b*2 = *c*2 – *a*2.

**Каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

**Построение гиперболы**

На координатных осях откладываем отрезки *OA* = *OA*1 *= a* и *OB*1 = *OB = b* — действительную и мнимые полуоси гиперболы (рис. 17). Затем откладываем отрезки *OF* и *OF*1, равные *AB*. Точки *F* и *F*1 — фокусы. На продолжении отрезка *AA*1 за точкой *A* берем произвольную точку *K*. Из точки *F* радиусом *r* = *AK* описываем окружность. Из точки *F*1 описываем окружность радиусом *r*1 = *A*1*K* = 2*a* + *r*. Эти окружности пересекутся в двух точках *M* и *M*1, эти точки лежат на гиперболе. Меняя *r* получим новые точки «правой ветви». Аналогично строятся точки «левой» ветви, либо можно использовать свойство симметрии гиперболы относительно оси ординат.

M1

O

B

y

B1

A

A1

F

F1

K

x

M

Рис. 17. Построение гиперболы

**Асимптоты гиперболы**

Прямые $y=\frac{b}{a}x и y=-\frac{b}{a}x$ для которых $\left|k\right|=\frac{b}{a}$, обладают следующими (только им присущим) свойством: при неограниченном продолжении каждая из них неограниченно сближается с гиперболой (рис. 18). Данные прямые называются *асимптотами* гиперболы (выделены красным на чертеже).

x

F

F1

y

O

A

A1

B

B1

L1

L

Рис. 18. Асимптоты гиперболы

Геометрический смысл мнимой оси. Через вершину *A* гиперболы проведем прямую *LL*1 перпендикулярную к действительной оси. Тогда отрезок *LL*1 этой прямой, заключенный между асимптотами гиперболы, равен мнимой оси гиперболы *BB*1 = 2*b* (рис. 18).

**ПАРАБОЛА**

Еще одна линия второго порядка — парабола.

*Парабола* (рис. 19) есть геометрическое место точек (*M*), равноудаленных от данной точки *F* и данной прямой *PQ*:

*FM* = *KM*.

Точка F называется *фокусом*, а прямая — *директрисой* параболы. Расстояние *FC* = *p* от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы.

D

Q

x

y

O

F

M

K

P

C

Рис. 19. Парабола

Точка *O* называется *вершиной* параболы.

Прямая *CF* называется *осью* параболы. Парабола симметрична относительно своей оси.

**Каноническое уравнение параболы**

*y*2 = 2*px*

**Построение параболы по данному параметру *p***

Проведем прямую *PQ* — директрису параболы (рис. 20) и на данном расстоянии о нее возьмем точку *F* (фокус). Середина *O* отрезка *CF* будет вершиной, а прямая *CF* — осью параболы. На луче *OF* возьмем произвольную точку *R* и через нее проведем прямую *RS* в двух точках *M* и *M*1. Точки *M* и *M*1принадлежат искомой параболе. Меняя положение точки *R*, будем находить новые точки параболы.

Q

O

C

P

F

M

M1

R

S

Рис. 20. Построение параболы

1. Аполлооний Пергский — древнегреческий математик, один из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, живших в III веке до н. э. Аполлоний прославился в первую очередь монографией «Конические сечения» (8 книг), в которой дал содержательную общую теорию *эллипса*, *параболы* и *гиперболы*. Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса». Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота, *абсцисса*, *ордината*, *аппликата*. [↑](#footnote-ref-1)
2. Пьер Ферма (1601 – 1655) — знаменитый французский математик, один из предшественников Ньютона и Лейбница в разработке дифференциального исчисления; внес большой вклад в теорию чисел. Большинство работ Ферма (в том числе и по аналитической геометрии) не публиковались при жизни автора. [↑](#footnote-ref-2)
3. Рене Декарт (1596 – 1650) — знаменитый французский философ и математик. Опубликование его «Геометрии» в 1637 г. Читается (условно) датой рождения аналитической геометрии. [↑](#footnote-ref-3)
4. От греческого слова «канон» — образец. Таким образом, название «каноническое» равнозначно названию «типовое». [↑](#footnote-ref-4)